Analysis III

Rijo Peedikayil - rpeedikayil@ethz.ch

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

1.1 Definitionen

Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}, \quad t \to f(t)$:

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

wobei f := *inverse* Laplace Transformation von $F(s)$: $f(t) := \mathscr{L}^{-1}(F(s))$
Die Laplace-Transformierte existiert, wenn die Funktion f stückweise stetig ist und das Wachstum der Funktion, sodass $|f(t)| \leq Me^{kt}$ gilt, eingeschränkt ist.

1.2 Linearität

$$\boxed{\mathscr{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \cdot \mathscr{L}(f(t)) + \beta \cdot \mathscr{L}(g(t))}$$

wobei f, g Funktionen und α, $\beta \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Die Linearität gilt auch für die inverse Laplace Transformation.

Beispiel: Laplace Transform

- Sei $f(t) = 2t + e^t$

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}\left(2 \cdot t + 1 \cdot e^t\right) = 2\mathscr{L}(t) + \mathscr{L}\left(e^t\right) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

- Sei $F(s) = \frac{4}{s^5}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{24}{s^5}\right) = \frac{1}{6}t^4$$

- Sei $F(x) = \frac{a}{bs+c}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \frac{a}{bs+c} = \frac{a/b}{s + c/b} = \frac{a/b}{s - (-c/b)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{a}{b}}{s - \left(-\frac{c}{b}\right)}\right) = \frac{a}{b}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - \left(-\frac{c}{b}\right)}\right) = \frac{a}{b}e^{-\frac{c}{b}t}$$

1.3 Shifting Theorem (s-shifting)

Sei $\mathscr{L}(f)(s) = F(s)$, then: $\boxed{\mathscr{L}(e^{at} \cdot f(t)) = F(s-a)}$

1.4 LT von Ableitungen

Sei $f \in C^{n-1}$ (f ist $n-1$-mal stetig differenzierbar) und $f(n)$ stückweise stetig, dann gilt:

$$\boxed{\mathscr{L}(f^n)(s) = s^n \mathscr{L}(f) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^j(0)}$$

für alle $n \geq 1$:

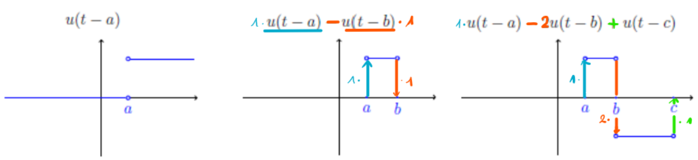
$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left(f'\right)(s) &= s\mathscr{L}(f) - f(0) \\ \mathscr{L}\left(f''\right)(s) &= s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0) \\ \mathscr{L}(f''')(s) &= s^3\mathscr{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \end{aligned}$$

1.5 Integration

$$\boxed{\mathscr{L}\int_0^t f(x)\, dx = \frac{1}{s}F(s)}$$

1.6 t-shifting, Heaviside Funktion

If $a \geq 0, \quad u(t-a) := \begin{cases} 1 & \text{if } t > a \\ 0 & \text{if } t < a \end{cases} \quad \mathscr{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}$



$$\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s)$$
$$\mathscr{L}(f(t)u(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f(t+a))$$

Tipps: Ergänzen & Erweitern, Periodizität und Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen (Ch. 8.7 (S.13)). Zuerst s-shift und danach t-shift.

Beispiel: t-shifting

- Sei $f(t) = e^{2t} \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow a = 2$:

$$L(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \mathscr{L}(f)(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+\omega^2}$$

Die Lösung für diese Art von Problem besteht darin, die Funktion durch die Heaviside-Funktion u auszudrücken. In diesem Fall ist

- Löse das Anfangswertproblem $\begin{cases} y' - 5y = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ für $f(t) = \begin{cases} 3e^t, & \text{für } 0 < t < 2 \\ 0, & \text{für } t \geq 2 \end{cases}$

Man wendet die übliche Vorgehensweise an: Zuerst findet man die Laplace-Transformierte der linken Seite der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(y' - 5y) = \mathcal{L}(y') - 5\mathcal{L}(y) = sY - y(0) - 5Y = (s-5)Y - 1.$$

Die gleiche Prozedur wird auf der rechten Seite durchgeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) &= 3\mathcal{L}(e^t) - 3\mathcal{L}(e^t u(t-2)) \\ &= \frac{3}{s-1} - \frac{3e^{2-2s}}{(s-1)}. \end{aligned}$$

Die Lösung für $Y(s)$ lautet

$$Y(s) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-5} + \frac{3e^2}{4}\left(\frac{e^{-2s}}{s-1} - \frac{e^{-2s}}{s-5}\right) + \frac{1}{s-5}.$$

Anwendung der inversen Laplace-Transformierten auf beiden Seiten führt zu

$$y(t) = -\frac{3}{4}(e^t - e^{5t} - e^2(u(t-2)e^{t-2} - u(t-2)e^{5(t-2)}) + e^{5t}.$$

1.7 Dirac's delta funktion

Für $a \in [0, \infty)$ gilt:

$$\delta(t-a) := \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1$$

$$\int_0^\infty g(t)\delta(t-a)dt = g(a) \quad \text{und:} \quad \mathscr{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$$

Beispiel:

- Sei $f(t) = t^2$, dann ist $f(t-a) = (t-a)^2$, betrachte $u(t-a)f(t-a)$

$$\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}\mathscr{L}(f) = e^{-as}\frac{2}{s^3}$$

Beispiel:

- Sei die DGL $y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\mathscr{L}\left(y'' - y' + y\right) = \mathscr{L}(0) = 0 = \mathscr{L}\left(y''\right) - \mathscr{L}\left(y'\right) + \mathscr{L}(y)$$
$$s^2\mathscr{L}(y) - \underbrace{sy(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=1} - (s\mathscr{L}(y) - \underbrace{y(0)}_{=0}) + \mathscr{L}(y) = 0$$

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{s^2 - s + 1} = \frac{1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}$$

$$y = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(y)) = \sqrt{\frac{4}{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

Beispiel:

- Sei $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^4} = e^{-2s}\frac{1}{6}\underbrace{\frac{3}{s^4}}_{=\mathscr{L}(t^3)}$

$$\mathscr{L}^{-1}(F) = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-2}\frac{1}{6}\frac{3}{s^4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

1.8 Convolution (Faltung)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Properties:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $f * 0 = 0 * f = 0$
5. $f * 1 \neq f$
6. $f * f$ is not always ≥ 0

$$\boxed{\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)}$$

1.9 Ableitung der LT

Sei f stückweise stetig und beschränkt, dann gilt:

$$\mathscr{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[\mathscr{L}(f)(s)]$$
$$\mathscr{L}(tf(t)) = -\mathscr{L}'(f) = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}(f)$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left(F'(s)\right) = -tf(t)$$

1.10 Integral der LT

Existiert ferner $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, so gilt:

$$\mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(f)(\sigma)d\sigma$$

1.11 Lösen von DGL mit LT

1. DGL finden und LT anwenden ($\mathscr{L}(y) = Y$)
   $\Rightarrow$ Anfangsbedingungen einsetzen
   $$y'' + ay' + by = r(t)$$
   $$\left(s^2Y - sy(0) - y'(0)\right) + a(sY - y(0)) + bY = R(s)$$
2. Nach Y lösen
   $$\left(s^2 + as + b\right)Y = R(s) + sy(0) + y'(0) + ay(0)$$
3. Inverse LT von $\mathscr{L}(y)$ berechnen
   Falls Anfangsbedingungen so gegeben $y(a), y'(a), \ldots$:
   - Stubstituieren: $t = \tilde{t} + a$
   - $y''+ay'+by = r(t) \Rightarrow \tilde{y}''+a\tilde{y}'+b\tilde{y} = r(\tilde{t}+a)$ $\tilde{y}(0) = y(a), \tilde{y}'(0) = y'(a), \ldots$
   - Normal lösen $\Rightarrow \tilde{Y} \to \tilde{y}(\tilde{t})$
   - Rücksubstituieren: $\tilde{t} = t - a; \tilde{y}(\tilde{t}) \to y(t)$

1.11.1 Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen des Nenners finden $\to n_i$
2. $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots + \frac{Z}{x-x_i}$

$\Rightarrow$ Komplexe NS $z_i \& \bar{z}_i$ von $x^2 + p_i x + q_i$: $\quad \frac{Bx+C}{x^2+p_i x+q_i}$

4. Brüche so erweitern, dass alles wieder auf einem Bruchstrich Platz hat.
5. Bestimmen der Konstanten $A, B, C, \ldots$ durch Koeffizientenvergleich

Beispiel: Convolution

- Sei $t * \sin(t) = \int_0^t \sin(\tau)(t-\tau)d\tau$
  $= \int_0^t (t \cdot \sin(\tau) - \tau \cdot \sin(\tau))d\tau = -t\cos(\tau) - \sin(\tau) + \tau\cos(\tau)|_0^t$
  $= -t\cos(t) - \sin(t) + t\cos(t) + t = t - \sin(t)$

Beispiel: Lösen von DGL mit LT

- Sei $y' + y = \delta(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin(t), \quad y(0) = 1$

LHS: $\quad \mathscr{L}\left(y'\right) + \mathscr{L}(y) = s\mathscr{L}(y) - 1 + \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(y)(s+1) - 1$

RHS: $\quad = e^{-\pi s} + e^{1\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left(e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s}\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{1}{s+1)}\right)$$
$$= u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}(\sin(t-2\pi) - \cos(t-2\pi) + e^{-(t-2\pi)}) + e^{-t}$$
$$= e^{-t} + u(t-\pi)e^{\pi}e^{-t} + u(t-2\pi)\frac{1}{2}\left(\sin(t) - \cos(t) + e^{2\pi}e^{-t}\right)$$

Beispiel: Basic Laplace Transform

- Finde $\mathscr{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$, schreibe $f(t) = \sin(t)$

Prüfe: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)}{1} = 1$

Dann folgt: $\mathscr{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathscr{L}(\sin)(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+1}d\sigma$

$$= \arctan(\sigma)|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

$f(t)$	$\mathscr{L}f(t) = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(2)
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)
$\delta(t)$	1	(5)
$\delta(t-a)$	e^{-sa}	(6)
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	(7)
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$	(8)
$(-t)^n f(t)$	$F^n(s)$	(9)
$-tf(t)$	$F'(s)$	(10)
$t^2 f(t)$	$F''(s)$	(11)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(12)
$f^n(t)$	$s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	(13)
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$	(14)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(15)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(16)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	(17)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	(18)
$\sin^2 kt$	$\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	(19)
$\cos^2 kt$	$\frac{s^2+2k^2}{s(s^2+4k^2)}$	(20)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(21)

$1-e^{at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	(22)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	(23)
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	(24)
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	(25)
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	(26)
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	(27)
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(28)
$e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(29)
$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(30)
$e^{at}\sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(31)
$e^{at}\cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(32)
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(33)
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(34)
$t\sin kt\cos kt$	$\frac{ks}{(s^2+k^2)^2}$	(35)
$t\sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(36)
$t\cosh kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(37)
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$	(38)
$\sin at\cdot f(t)$	$\frac{1}{2i}(F(s-ia)-F(s+ia))$	(39)
$\cos at\cdot f(t)$	$\frac{1}{2}(F(s-ia)+F(s+ia))$	(40)
$\sinh at\cdot f(t)$	$\frac{1}{2}(F(s-a)-F(s+a))$	(41)
$\cosh at\cdot f(t)$	$\frac{1}{2}(F(s-a)+F(s+a))$	(42)
$\ln(at)kt$	$\frac{-1}{s}(\ln(\frac{s}{a})+\gamma)$	(43)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(44)
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(45)
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s^n}F(s) n\geq 1$	(46)
$\int_0^t f\frac{(t-q)^{n-1f(q)}}{(n-1)!}dq$	$\frac{1}{s}F(s)$	(47)
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s^n}F(s) n\geq 1$	(48)
$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty f(u)du$	(49)

Convolution Product Formula:

$$e^{at}*e^{at}=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$$

2 Fourier

2.1 Periode p

Eine Funktion $f(x)$ ist *periodisch*, wenn
a) f für genügend viele $x\in\mathbb{R}$ definiert ist und
b) eine Periode $p\in\mathbb{R}, p>0$ existiert, so dass $f(x)=f(x+p)$ für alle x.
Eigenschaften: Sei $f(x)=f(x+p) \quad \Rightarrow f(a\cdot x)$ ist $\frac{p}{a}$-periodisch

1. Falls $f(x)$ periodisch ist und stetig, dann ist $f(x)$ begrenzt.
2. Falls $f(x)$ periodisch ist und glatt, dann ist $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ begrenzt. Hierbei haben beide Funktionen die gleiche Periode.
3. Falls $f(x)$ oder $f^{(n)}(x)$ nicht begrenzt sind, so sind $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ nicht periodisch.
4. Die Funktion f(t) = g(t) + h(t) ist periodisch, wenn $\frac{p_g}{p_h}\in\mathbb{Q}$
$p_f=\frac{kgV(p_g,p_h)}{ggT(p_g,p_h)}$.

2.2 Dirichlet Theorem

Bei Unstetigkeiten $f(x^-)\neq f(x^+)$ konvergiert die Fourier Reihe zu:

$$\tfrac{1}{2}\left(f\left(x_0^-\right)+f\left(x_0^+\right)\right)=f\left(x_0\right)$$

2.3 Fourier-Reihe

Damit die Fourier-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert, muss $f(x)$ auf dem ganzen Intervall definiert sein und für jede Unstetigkeit x_0 im Intervall muss das **Dirichlet Theorem (2.2)** gelten. Konst.: $a_0, a_n, b_n\in\mathbb{R}$, Periode: $p=2L$.

$$\boxed{f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]}$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$
$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,\quad \text{wenn } n>0$$
$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,\quad \text{wenn } n>0$$

Tipps: Orthogonalität (Ch. 8.5 (S.11)), Parität (Ch. 8.3 (S.11)), Koeffizientenvergleich und Partielle Integration

Beispiel: Fourier-Reihe

- Berechnen der Fourier-Reihe der Funktion $f(x)=\pi-x$ mit Periode 2π definiert auf $(-\pi,\pi) \quad\Rightarrow\quad 2\pi=p=2L\to L=\pi$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi n}{\pi}x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(nx)dx$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)dx=0$$
$$b_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi x}{\pi}x\right)dx=\ldots=\frac{2\cos(n\pi)}{n}$$
$$\Rightarrow f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(n\pi)}{n}\sin(nx)$$

- Sei f 2-periodisch $\begin{cases} e^{1-\frac{1}{x^2}} & 0<x<1 \\ \frac{2}{x^2+1} & -1<x<0 \end{cases}$

$$f\left(1^+\right)=f\left(1^-\right)=1 \quad ; \quad f\left(-1^+\right)=f\left(-1^-\right)=1$$
$$f\left(0^+\right)=0,\quad f\left(0^-\right)=2\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}(0+2)=1$$

2.3.1 Gerade (even) Funktionen

Fourier-Reihe für **gerade** ($f(x)=f(-x), \forall x\in\mathbb{D}$) Funktion f:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right]$$

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

Zusatz: $f(a\cdot x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty A\left(\frac{\omega}{a}\right)\cdot\cos(\omega x)\,d\omega$

2.3.2 Ungerade (odd) Funktionen

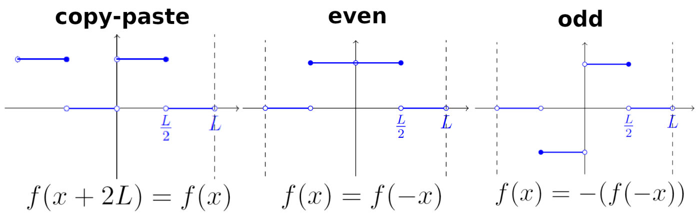
Fourier-Reihe für **ungerade** ($f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{D}$) Funktion f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \right]$$

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

2.4 Expansion

Sei f definiert auf dem Intervall $(0, L)$ und $x \in \mathbb{R}$



Beispiel: Fourier-Reihe: Erweiterung gerade Funktion

- Erweitere $2x$ auf $(0, 1)$ zu einer geraden 2-periodischen Funktion und finde die Fourier-Reihe. Sei $f_g := \begin{cases} 2x & x \in (0, 1) \\ -2x & x \in (-1, 0 \end{cases}$

$$b_n = 0 \quad ; \quad a_0 = \int_0^1 2x dx = 1$$

$$a_n = 2 \int_0^1 2x \cos(n\pi x) dx = 4 \left(x \frac{\sin(n\pi x)}{\pi n} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{n\pi} dx$$

$$= 4 \underbrace{\frac{\sin(\pi n)}{\pi n}}_{=0} + 4 \frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2} \Big|_0^1 = 4 \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^1} = 4 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi x) \quad (n = 2k - 1)$$

2.5 Komplexe Fourier-Reihe

Sei f $2L$-periodisch, dann ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

$$\boxed{f(x) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{i\pi n}{L} x}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-\frac{i\pi n}{L} x} dx; \quad c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$a_0 = c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$c_0 = a_0; \quad c_n = 1/2 \cdot (a_n - ib_n); \quad c_{-n} = 1/2 \cdot (a_n + ib_n)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x); \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$$

Tipps: Euler-Beziehungen (Ch. 8.9 (S.13) & Ch.2.9 (S.4))

2.6 Minimum square error

Der minimale quadratische Fehler eines trigonometrischen Polynomes N-ten Grades auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist:

$$\boxed{E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right)}$$

2.7 Absolut integrabel

Eine Funktion f ist **absolut integrabel**, wenn gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

2.8 Fourier Integral

Sei f stückweise stetig in jedem endlichen Interval, absolut integrabel und mit Links- und Rechtsableitungen an jeder Unstetigkeit.
Dann ist sein **Fourier-Integral**:

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)) d\omega}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(\omega v) dv$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(\omega v) dv$$

2.8.1 Gerade (even) Funktion

Ist f **gerade**, so gilt: $\quad f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos(\omega v) dv \quad ; \quad B(\omega) = 0$$

2.8.2 Ungerade (odd) Funktion

Ist f **ungerade**, so gilt: $\quad f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$

$$A(\omega) = 0 \quad ; \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin(\omega v) dv$$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f :

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}$$

Tipps: Euler-Beziehungen (Ch. 8.9 (S.13)),davon meist benötigten Formeln finden Sie hier:

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \cdot \sin(x)$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{\pm i\pi \cdot n} = -1^n$$

Eigenschaften:

1. $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathfrak{F}(f) + \beta \mathfrak{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty}$ sowie f' (bzw. f'') absolut integrabel, so gilt:
$$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2 \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x f(x)) = i \frac{d}{d\omega} \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$
3. Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrabel, so ist
$$\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$$
$$\mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f \cdot g)$$
4. Weitere nützliche Transformationen:
$$\mathfrak{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t)$$
$$\mathfrak{F}(t^2 u_x) = t^2 \mathfrak{F}(u_x)$$
$$\mathfrak{F}\left(x e^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{-i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)}$$
$$\mathfrak{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-b\omega^2}\right) = \frac{x}{(2b)^{3/2}} e^{\left(-\frac{x^2}{4b}\right)}$$
x-Shift
$$\mathfrak{F}(f(x - a)) = e^{-ia\omega} \mathfrak{F}(f(x)) = e^{-ia\omega} \mathfrak{F}(\omega)$$
ω-Shift
$$\mathfrak{F}(\omega - a) = \mathfrak{F}\left(e^{iax} f(x)\right)$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ak^2 + bk + c\right)} dk = e^{\frac{b^2}{4a} - c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die **inverse** Fourier Transformation von g ist:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega}$$

Es gilt, wenn $g = \mathfrak{F}(f)$:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$$

Beispiel: Fourier Transformation

Sei $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x} e^{-i\omega x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-(1+i\omega)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\bigg|_0^1 = \frac{1 - e^{-(1+i\omega)}}{1 + i\omega}$$

2.11 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Definition: Die Funktion $f(t)$ kann als Summe von komplexen Exponentialfunktionen geschrieben werden: $f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \cdots + c_{n-1} e^{(n-1)it}$, wobei die c_k die Fourier-Koeffizienten sind. Diese Form lässt sich durch eulersche Identitäten weiter vereinfachen.
Die DFT transformiert N diskrete Werte $\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\}$ in N Frequenzwerte $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$. Die Formel lautet:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cdot w_N^{-jk}, \quad w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}.$$

Matrixform: $C = M^{-1} \cdot F$, wobei M^{-1} die inverse Fourier-Matrix ist, deren Einträge $(M^{-1})_{jk} = \frac{1}{N} w_N^{-jk}$ sind mit $w_N = e^{2\pi i/N}$.

Beispiel: Diskrete Fourier Transformation

Die Inverse der Fourier-Matrix für $N = 4$ mit $w_4 = e^{2\pi i/4} = i$ ist:

$$M^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 & w_4^0 \\ w_4^0 & w_4^{-1} & w_4^{-2} & w_4^{-3} \\ w_4^0 & w_4^{-2} & w_4^{-4} & w_4^{-6} \\ w_4^0 & w_4^{-3} & w_4^{-6} & w_4^{-9} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Gegeben $F = \{2, 0, 6, 4\}$, berechnen wir :

$$C = M^{-1} \cdot F = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -4+3i \\ 5 \\ -4-3i \end{bmatrix}.$$

2.12 Inverse Diskrete Fourier-Transformation (IDFT)

Definition: Die IDFT transformiert N Frequenzwerte $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$ zurück in N diskrete Werte $\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\}$. Die Formel lautet:

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot w_N^{jk}, \quad w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}.$$

Matrixform: $F = M \cdot C$, wobei M die Fourier-Matrix ist, deren Einträge $M_{jk} = w_N^{jk}$ sind mit $w_N = e^{2\pi i/N}$.
Tipp: Die Fourier-Matrix und ihre Inverse sind symmetrisch. Die Inverse kann durch komplexe Konjugation erhalten werden, wobei der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ beachtet werden muss.

2.13 Fast Fourier-Transformation (FFT)

Definition: Die FFT ist ein Algorithmus zur Berechnung der Diskreten Fourier-Transformation (DFT). Sie reduziert die Komplexität der Berechnung von $O(N^2)$ auf $O(N \log N)$.
Algorithmus: Angenommen, wir haben N diskrete Werte $\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\}$. Die Schritte zur Berechnung der FFT sind wie folgt:
1. Bestimme den Wert von w_M, wobei $M = \frac{N}{2}$ und $w_M = e^{i\frac{2\pi}{M}}$.
2. Berechne die geraden und ungeraden Koeffizienten $C^{(o)}$ und $C^{(e)}$ unter Verwendung der Formeln

$$C^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(o)}, \quad \text{und} \quad C^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(e)}$$

wobei $f^{(e)}$ und $f^{(o)}$ die Vektoren der ungeraden und geraden Indizes von f sind.
3. Bestimme den Wert von $w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.
4. Berechne die Koeffizienten c_k für $k < M$ mit

$$c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + w_N^{-k} c_k^{(e)}\right),$$

und für die Koeffizienten c_{k+M} mit $k \geq M$

$$c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - w_N^{-k} c_k^{(e)}\right).$$

Beispiel: Fast Fourier Transform mit N = 4

Wir berechnen die FFT für $N = 4$ diskrete Werte $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$. Die Schritte sind wie folgt:
1. Wir haben $N = 4$ und $M = \frac{N}{2} = 2$, daher ist $w = w_M = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$.
2. Bezeichnen wir $F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}^T$. Folglich erhalten wir

$$C^{(o)} = M_2^{-1} f^{(o)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{bmatrix},$$

$$C^{(e)} = M_2^{-1} f^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{bmatrix}.$$

3. Für $N = 4$ ist $w_N = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
4. Die Koeffizienten c_k für $k < 2$ sind

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} + w_N^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0 + f_2}{2} + \frac{f_1 + f_3}{2}\right),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} + w_N^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0 - f_2}{2} - i\frac{f_1 - f_3}{2}\right)$$

und die Koeffizienten c_{k+M} für $k \geq 2$ sind

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} - w_N^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0 + f_2}{2} - \frac{f_1 + f_3}{2}\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(c_1^{(e)} - w_N^1 c_1^{(o)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0 - f_2}{2} - i\frac{f_1 - f_3}{2}\right).$$

Unter Verwendung der gegebenen numerischen Werte $F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T$, könnte man noch $C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} & -1 - \frac{3}{4}i & \frac{5}{4} & -1 + \frac{3}{4}i \end{bmatrix}^T$ berechnen.

2.14 Inverse Fast Fourier-Transformation (IFFT)

Definition: Die Inverse Fast Fourier-Transformation (IFFT) ermöglicht es, aus den Frequenzkoeffizienten $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$ die ursprünglichen diskreten Werte $\{f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\}$ effizient zu rekonstruieren.
Algorithmus: Angenommen, wir haben N Frequenzkoeffizienten $\{c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\}$. Die Schritte zur Berechnung der IFFT sind wie folgt:
1. Bestimme den Wert von w_M, wobei $M = \frac{N}{2}$ und $w_M = e^{i\frac{2\pi}{M}}$.
2. Berechne die geraden und ungeraden Koeffizienten $F^{(e)}$ und $F^{(o)}$ unter Verwendung der Formeln

$$F^{(e)} = \begin{bmatrix} f_0^{(e)} \\ f_1^{(e)} \end{bmatrix} = M_2 c^{(e)}, \quad \text{und} \quad F^{(o)} = \begin{bmatrix} f_0^{(o)} \\ f_1^{(o)} \end{bmatrix} = M_2 c^{(o)},$$

wobei $c^{(e)}$ und $c^{(o)}$ die Vektoren der ungeraden und geraden Indizes von C sind.
3. Bestimme den Wert von $w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.
4. Berechne die Koeffizienten f_k für $k < M$ mit

$$f_k = \left(f_k^{(o)} + w_N^k f_k^{(e)}\right),$$

und für die Koeffizienten f_{k+M} mit $k \geq M$

$$f_{k+M} = \left(f_k^{(o)} - w_N^k f_k^{(e)}\right).$$

3 PDEs

Eine partielle DGL (PDE) ist eine Gleichung, in welcher eine Funktion u sowie einige partielle Ableitung von u involviert sind.

- **Linear**: falls u und die partiellen Ableitungen mit Grad = 1 (Potenz) erscheinen und nicht miteinander multipliziert werden. z.b. linear: $u_{xy} + u_z + u_t t = g(x, y, t)$
  z.b. non-linear: $u_{xy} \cdot u_z + u_t t = g(x, y, t)$
- **Homogen**: wenn sie linear ist und wenn jeder Term u oder eine partielle Ableitung enthält.
- **Ordung**: die maximale Ordnung aller involvierten Ableitungen.
- **Dimension**: number of space variables

3.1 Wichtige PDEs

- Eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch)

- Eindimensionale Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch)

- Zweidimensionale Laplacegleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(*linear, 2. Ordnung, homogen, elliptisch*)

- Zweidimensionale Poissongleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(*linear, 2.Ordnung, inhomogen, elliptisch*)

- Zweidimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, hyperbolisch*)

- Zweidimensionale Wärmegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, parabolisch*)

- Dreidimensionale Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(*linear, 2.Ordnung, homogen, elliptisch*)

3.2 Lineare PDE 2.Ordnung

Eine lineare PDE 2.Ordnung kann man in die Form

$$Au_{xx} + \mathbf{2}Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Eine lineare PDE 2.Ordnung heisst

- **hyperbolisch**, falls $AC - B^2 < 0$
- **parabolisch**, falls $AC - B^2 = 0$
- **elliptisch**, falls $AC - B^2 > 0$
- **mixed type**, falls je nach Vorzeichen anders

Beispiel: PDE 2. Ordnung

- Sei $u(x, y) = x \sin(x + 2y)$, zeige: u löst $u + u_{xx} = \frac{1}{x} u_y$

$$\begin{aligned} u_x &= \sin(x + 2y) + x\cos(x + 2y) \\ u_{xx} &= \cos(x + 2y) + \cos(x + 2y) - x\sin(x + 2y) \\ u_y &= 2x\cos(x + 2y) \\ \Rightarrow u + u_{xx} &= 2\cos(x + 2y) \overset{!}{=} \frac{2x\cos(x + 2y)}{x} = \frac{u_y}{x} \end{aligned}$$

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x \right) \qquad (1)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \qquad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \qquad (3)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) \qquad (4)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \qquad (5)$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \qquad (6)$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Beispiel: Vorgehen 1: Eindimensionale Wellengleichung

- Löse für $L = \pi$: $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$

$c = 2$ & mit (2) $\lambda_n = 2n$. Mit (3) finden wir nichts $\Rightarrow$ mit (5):

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x)\sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((1 - n)x) - \cos((1 + n)x))dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((1 - n)x)}{1 - n} - \frac{\sin((1 + n)x)}{1 + n} \right) \Bigg|_0^\pi = 0, \quad \text{für } n \geq 2$$

Mit (3) folgt:

$$f(x) = \sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) = B_1 \sin(x) \quad \Rightarrow B_1 = 1$$

Aus (4) sehen wir direkt, dass $B_n^* = 0$

$$\Rightarrow u(x, t) = B_1 \cos(\lambda_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \cos(2t)\sin(x)$$

3.3.2 Vorgehen 2: Separation der Variabeln

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$u_{tt} = F\ddot{G}; \quad u_{xx} = F''G \quad \rightarrow F\ddot{G} = c^2 F''G$$

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k; \quad \begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 kG \end{cases}$$

Randbedingungen finden:

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \forall t \geq 0 \Rightarrow \mathbf{F(0) = 0}$$
$$u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \forall t \geq 0 \Rightarrow \mathbf{F(L) = 0}$$
$$\Rightarrow u(x, t) = F(x)G(t)$$

Löse mit (1) Allgemeine Lösung: $\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = k$

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} A_1 e^{\sqrt{k}x} + A_2 e^{-\sqrt{k}x} & k > 0 \\ A_1 \cos(\sqrt{|k|}x) + A_2 \sin(\sqrt{|k|}x) & k < 0 \\ A_1 x + A_2 & k = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{G(t)} = \begin{cases} B_1 e^{\sqrt{k}t} + B_2 e^{-\sqrt{k}t} & k > 0 \\ B_1 \cos(\sqrt{|k|}t) + B_2 \sin(\sqrt{|k|}t) & k < 0 \\ B_1 t + B_2 & k = 0 \end{cases}$$

Beispiel: Vorgehen 2: Separation der Variabeln

- Finde eine Lösung $u(x, t)$ der PDF $\frac{1}{2}u_x + u_t = 0$.

Mit dem Ansatz $u(x, t) = F(x)G(t)$ folgt:

$$\frac{1}{2}F'(x)G(t) + F(x)\dot{G}(t) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = 0$$

$$\forall x, t : \frac{F\prime(x)}{2F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \text{konst} = \lambda$$

$$\frac{1}{2F(x)}\frac{dF}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{dF}{F} = 2\lambda\, dx$$

$$\Rightarrow F(x) = e^{2\lambda x}C_1 \quad G(t) = C_2 e^{-\lambda t}$$

$$u(x, t) = F(x)G(t) = C_1 e^{2\lambda x} C_2 e^{-\lambda t} = Ce^{\lambda(2x - t)}$$

3.4 Eindimensionale Wellengleichung - d'Alembert

Sei $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit folgenden Nebenbedingungen (Cauchy Problem):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Alembert-Lösung ist dann gegeben als:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x - ct}^{x + ct} g(s)ds$$

Beispiel: Eindimensionale Wellengleichung - d'Alembert

• Sei $u_{tt} = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$ und $u_t(x,0) = -1$
Die D'Alembertsche Lösung ist mit $c = 1$ dann

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(-1)ds \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+t)^2+1} + \frac{1}{(x-t)^2+1}\right) - t \end{aligned}$$

3.5 Normalform

Mit geeigneter Substitutionen kann eine PDE zweiter Ordnung in **Normalform** gebracht werden, d.h.:

$u_{vw} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	hyperbolisch
$u_{vv} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	parabolisch
$u_{vv} + u_{ww} = F(v,w,u,u_v,u_w)$	elliptisch

3.5.1 Vorgehen

Gegeben PDE zweiter Ordnung in $\{x,y\}$

- Bestimme A,B,C und die zwei Lösungen der charakteristischen Gleichung $A(y')^2 - 2By' + C = 0$
- Nun kann man die ODE nach der Steigung y' auflösen und erhält: $y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2-AC}}{A} = \lambda_{1,2}$
- Da A,B und C Konstanten sind, erhalten wir eine gewöhliche DGL mit zwei verschiedene Lösungen: $\phi(x,y) = C_1 = y_1 -_1 \cdot x, \psi(x,y) = c_2 = y_2 -_2 \cdot x$
- $\phi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ werden als Charakter.istiken bezeichnet. Nun können zwei neue Variablen v,w definiert werden. Hierbei ist $u =$ Die Definition ist für jeden Typ von PDE unterschiedlich (siehe unten)
- Berechne die Ableitungen der ursprünglichen Gleichung mit v und w. Die Kettenregel ist hier extrem wichtig. Sehr nützliche Ableitungen für $u = v(x,y) \cdot w(x,y)$ sind weiter unten.
- Setze alles in die PDE ein und erhalte die Normalform
- Integriere entsprechend und substituiere zurück, um die allgemeine Lösung zu erhalten

hyperbolisch:	$v = \varphi(x,y)$	$w = \psi(x,y)$
parablisch:	$v = x$	$w = \psi(x,y)$
elliptisch:	$v = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) + \psi(x,y)]$	$w = \frac{1}{2}[\varphi(x,y) - \psi(x,y)]$

$$\begin{aligned} u_x &= u_v \cdot v_x + u_w \cdot w_x, \\ u_y &= u_v \cdot v_y + u_w \cdot w_y, \\ u_{xx} &= u_{vv} \cdot v_x^2 + u_v \cdot v_{xx} + u_{ww} \cdot w_x^2 + u_w \cdot w_{xx} + 2v_x \cdot w_x \cdot u_{vw}, \\ u_{yy} &= u_{vv} \cdot v_y^2 + u_v \cdot v_{yy} + u_{ww} \cdot w_y^2 + u_w \cdot w_{yy} + 2v_y \cdot w_y \cdot u_{vw}, \\ u_{xy} &= u_{vv} \cdot v_x \cdot v_y + u_v \cdot v_{xy} + u_{ww} \cdot w_x \cdot w_y + u_w \cdot w_{xy} \\ &\quad + (v_y \cdot w_x + v_x \cdot w_y) \cdot u_{vw}. \end{aligned}$$

Beispiel: Normalform

Bringe $u_{xx} + 2u_{xy} = -4e^y$ in Normalform und gib die allgemeine Lösung an
$A = B = 1, \quad C = 0 \to$ charakteristische Gleichung $(y')^2 - 2y' = 0$
Lösungen der char. Gleichung: $y_1' = 0$ und $y_2' = 2$
Fall $1: y' = 0 \to dy = 0dx \Rightarrow y = C_1$
Fall $2: y' = 2 \to dy = 2dx \Rightarrow y = 2x + C_2 \to C_2 = y - 2x$

$v = C_1 = y$ und $w = C_2 = y - 2x$

Vorbereitung: $v_x = 0; v_y = 1; w_x = -2; w_y = 1$

$$u_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dw}\frac{dw}{dx} = u_v v_x + u_w w_x = -2u_w$$

$$u_{xx} = -2u_{wv}v_x - 2u_{ww}w_x = 4u_{ww}$$

$$u_{xy} = -2u_{wv}v_y - 2u_{ww}w_y = -2u_{wv} - u_{ww}$$

$$F = -4e^y = -4e^v$$

$$u_{ww} + 2(-2u_{wv} - 2u_{ww}) = -4e^v \quad \Rightarrow u_{wv} = e^v \text{ (Normalform)}$$

$$u(v,w) = \iint u_{wv}\,dwdv = \iint e^v\,dwdv = \int [w \cdot e^v + \tilde{\varphi}(v)]\,dv$$

$$= w \cdot e^v + \varphi(v) + \psi(w)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = (y-2x)e^y + \underbrace{\varphi(y) + \psi(y-2x)}_{\text{min. 2x stetig diff'bar}}$$

3.6 Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

3.6.1 Vorgehen 1:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbediungungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0,L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

⇒ Manchmal ist B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

3.6.2 Vorgehen 2:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ nur auf $x \in (0,L)$.

- Nimm den Ansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$, separiere F und G, bestimme die Konditionen der Randbedingungen (der ODE für F und G) durch Betrachten von u_x.
- Löse die ODEs für F und G, setze sie zu u_n zusammen
- Verwende Superposition und schreibe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

- Benutze weitere Randbedingungen und vergleiche Koeffizienten in u mit denjenigen der Fourier-Reihe der 2L-periodischen geraden Fortsetzung von f

Allgemeine Lösung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)e^{-c^2n^2t}$$

3.7 Zeitunabhängige n-dim Wärmeleitungsgleichung

Die zeitunabhängige n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2\Delta u = c^2\nabla^2 u$ kann auf die n-dimensionale Laplacegleichung $\Delta u = 0$ reduziert werden. Für $n = 2$, Randbedingungen $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$ und $u(x,b) = f(x)$ mit $(x,y) \in [0,a][0,b]$ sprechen wir vom **Dirichlet-Problem**.

Dessen Lösung mit Separation und Superposition ist:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

⇒ Manchmal ist A_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

Beispiel: Zeitunabhängige n-dim Wärmeleitungsgleichung

• Sei $u_t = u_{xx}$ auf $x \in [0, 2\pi]$
mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, u(x,0) = x$ auf $0 < x < \pi$
Mit $u = F \cdot G$ erhalten wir $\begin{cases} F'' = \lambda F, & \dot{G} = \lambda G \\ F'(0) = F'(\pi) = 0 \end{cases}$

- $\lambda > 0$ allg. Lösung $F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$
Randbedingungen ergeben: $A = B = 0 \to$ uninteressant
- $\lambda = 0$: erhalten wir $F(x) = 0 \to$ uninteressant
- $\lambda < 0$: allg. Lösung $F(x) = A\cos(px) + B\sin(px)$ wobei $p = \sqrt{-\lambda}$.

Mit $F'(0) = -Ap\sin(0) + Bp\cos(0) = 0$ finden wir $B = 0$ und mit $F'(\pi) = -A\text{psin}(p\pi) = 0 \Rightarrow p = p_n = n$
Unterdessen $\dot{G} = -p^2 G$ und $G(t) = C \cdot e^{-p^2 t} \to G_n(t) = C_n \cdot e^{-p_n^2 t}$

- $u_n(x,t) = F_n \cdot G_n = A_n\cos(p_n)G_n e^{-p_n^2 t} =: D_n\cos(nx)e^{-n^2 t}$ und $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
- Weiter gilt $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\cos(nx) = x$. Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion:

$$D_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ -4 & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^2}\cos((2m+1)x)e^{(-2m+1)t}$$

3.8 Wärmeleitungsgleichung eines unendlichen Gebietes

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $u(x,0) = f(x)$ auf einem unendlichen Gebiet ($x \in \mathbb{R}, t \geq 0$). Dann ist die Lösung:

Vorgehen mit Fourier-Integral

$$u(x,t) = \int_0^\infty (A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px))e^{-c^2p^2t}dp$$
$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)dv$$
$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)dv$$

Bemerkung: Achte auf gerade/ungerade Funktionen

Vorgehen mit Fourier-Transformation

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit $\mathcal{F}(u_{xx}) = -\omega^2\hat{u}$, $\mathcal{F}(u_x) = i\omega\hat{u}$ und $\mathcal{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) = \hat{u}_t$ können wir die Gleichung transformieren:

$$\hat{u}_t = -c^2\omega^2\hat{u}$$

dann diese ODE für $\hat{u}$ lösen, die transformierte Anfangsbedingung einsetzen und $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ bestimmen.

Bemerkung: $\mathcal{F}$ ist immer in Bezug auf x.

Vorgehen mit Formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left[-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2\right]dv$$

Beispiel: Vorgehen mit Fourier-Integral

- Sei $u_t = u_{xx}$ mit $u(x,0) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(pv)}{p}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi p}\sin(p\pi)$$
$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(pv)dv = \frac{2}{\pi}\frac{-\cos(pv)}{p}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi p}(1-\cos(\pi p))$$
$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(p\pi)\cos(px) + (1-\cos(p\pi)\sin(px))}{p}e^{-p^2t}dp$$

Beispiel: Vorgehen mit Fourier-Transformation/Formel

- Sei $u_t = 4u_{xx}$ und $u(x,0) = f(x) = \sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$
$\hat{u}_t = -4\omega^2\hat{u}$ und die allg. Lösung: $\hat{u} = C \cdot e^{-4\omega^2 t}$
Mit der Anfangsbedingung folgt $\hat{u} = \hat{u}(\omega,0)e^{-4\omega^2 t}$, nun $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f} = e^{-\omega^2}$, somit ist $\hat{u} = e^{-\omega^2(1+4t)}$ mit der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ak^2+bk+c\right)}dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

folgt dann

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+4t)}}e^{\frac{-x^2}{4+16t}}$$

3.9 Dirichlet auf dem Kreis

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit Radius R und einer Randbedingung...

- ... $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D finden wir die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

Wir bestimmen A_n und B_n mit Koeffizientenvergleich oder sonst mit:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)d\xi$$
$$A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi, \quad B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$$

- $\ldots u_r(R,\theta) = f(\theta)$ auf ∂D gilt die Lösung

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

mit $A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi, \quad B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin(n\xi)d\xi$

und A_0 ist eine nicht näher bestimmbare Konstante.

3.9.1 Bemerkungen

- Koordinatentransformationen

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

- Die Laplace-Gleichung (für $r \in [0,R)$, $\theta \in [0,2\pi)$)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{wird zu} \quad u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r = 0$$

Beispiel: Dirichlet auf dem Kreis (Lösung auf dem Rand)

- Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Finde die Lösung der Laplace-gleichung mit $u(x,y) = 2x^2 + y$ auf dem Rand (∂D)

$$u(x,y) = 2x^2 + y = 2r^2\cos^2(\theta) + r\sin(\theta) \overset{r\equiv 1}{=} 2\cos^2(\theta) + \sin(\theta)$$
$$= (\cos(\theta)+1)\sin(\theta)$$
$$u(1,\theta) = f(\theta) = 1 + \cos(\theta) + \sin(\theta)$$
$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

$\rightarrow A_0 = 1, B_1 = 1, A_2 = 1$ alle andern $A_n, B_n = 0$

$$u(r,\theta) = 1 + r\sin(\theta) + r^2\cos(2\theta)$$

Beispiel: Dirichlet auf dem Kreis (Lösung auf dem Kreis)

- Finde die Lösung der Laplacegleichung auf dem Kreis D mit $R = 2$ und $u_r(2,\theta) = \cos(3\theta)$ auf ∂D.
Es gilt $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$, also:

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$
$$u_r(2,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)) \overset{!}{=} \cos(3\theta)$$

$\rightarrow B_n = 0, n = 3 \rightarrow \cos(3\theta) = 3 \cdot 2^{3-1}A_3\cos(3\theta)$
$\Rightarrow A_3 = \frac{1}{12}, A_n$ sonst $= 0$

$$u(r,\theta) = A_0 + \frac{1}{12}r^3\cos(3\theta)$$

A_0 ist nicht bestimmbar

3.10 Poisson-Integral-Form

- Sei $\Delta u = 0$ und $u(R,\theta) = f(\theta)$ auf dem Kreis mit Radius R. Dann ist die Lösung mittels Poisson-Integral-Form gegeben als:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)f(\varphi)\,d\varphi$$

$$\text{Poisson-Integral-Kern} K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

Beispiel: Poisson-Integral-Form

Sei $u(1,\theta) = f(\theta) = \cos(3\theta)$ auf dem Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe. Finde den Funktionswert von u im Ursprung, ohne die Lösung u explizit zu berechen:
Es gilt $K(0,\theta,R,\varphi) = 1$. Poisson-Formel:

$$u(0,0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(0,\theta,1,\varphi)f(\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(3\varphi)d\varphi = \frac{1}{6\pi}\sin(3\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

3.11 Harmonische Funktionen

Eine Funktion, die die Laplace-Gleichungs $\Delta u = 0$ auf D erfüllt, heisst *harmonisch* auf dem Gebiet D.
Maximumsprinzip: Nimmt auf dem Gebiet D die harmonische Funktion u ihr Maximum im Innern von D an, so ist sie konstant.
Somit genügt es, für eine harmonische Funktion auf D ihr Maximum nur auf dem Rand ∂D zu suchen.
Ist u harmonisch auf der Kreisscheibe mit Radius R, so gilt der Mittelwertsatz insbesondere in folgender Form:

$$f(0,0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(R,\theta)d\theta$$

Beispiel: Harmonische Funktionen

- Finde das Maximum von $f(x,y) = x+y$ auf der Einheitskreisscheibe.

$f(r,\theta) = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \rightarrow$ harmonisch, Suche auf Rand:

$$f(1,\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$$

Ort des Maximums: $\frac{\partial}{\partial\theta} f(1,\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta) = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ Das Maximum ist bei $(1, \frac{\pi}{2})$, respektive $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und der Funktionswert ist $\sqrt{2}$.

Randmaxima überprüfen! $\rightarrow$ wenn f auf (0, π) definiert ist muss man 0 und π anschauen.

3.12 Well-posed und ill-posed Probleme

Wir nennen ein Problem *well-posed*, falls:

- Das Problem hat eine Lösung. (Existence)
- Die Lösung ist eindeutig. (Uniqueness)
- Die Lösung ist von Anfangsbedingungen und Randbedingungen abhängig. (Stability)

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist das Problem *ill-posed*.

3.12.1 Das Neumann Problem auf Region D

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla^2 u = f & \text{auf } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung wenn $\int_D f = \int_{\partial D} g$.

Beispiel: Neumann problem

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{in } D_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial D_2, \end{cases}$$

with D_2 being the disk of radius 2 centered at 0 and f and g are two given functions such that

$$\int_{D_2} f(x)\,dx = 3, \quad \text{and} \quad \int_{\partial D_2} g(x)\,dx = 2.$$

Solution: There is no solution.

$$\int_{D_2} \nabla^2 u(x)\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\int_{D_2} \text{div}(\nabla u(x))\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\int_{\partial D_2} \nabla u(x) \cdot n\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\int_{\partial D_2} \frac{\partial u}{\partial n}\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx \Rightarrow$$
$$\int_{\partial D_2} g(x)\,dx = \int_{D_2} f(x)\,dx \Rightarrow 2 \neq 3.$$

4 Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{Tc^2} = \alpha$

4.1 $\alpha = 0$

4.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X'(x) = A$$

4.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow \ddot{T} = 0$

$$T(t) = Ct + D$$

$$\dot{T}(t) = C$$

4.2 $\alpha > 0$

4.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

4.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow \ddot{T} - \alpha c^2 T = 0$

$$T(t) = Ce^{c\sqrt{\alpha}t} + De^{-c\sqrt{\alpha}t}$$

$$\dot{T}(t) = c\sqrt{\alpha}Ce^{c\sqrt{\alpha}t} - c\sqrt{c\alpha}De^{-c\sqrt{\alpha}t}$$

4.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

4.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$

$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

4.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad \ddot{T} + p^2c^2T = 0$

$$T(t) = C\sin(pct) + D\cos(pct)$$

$$\dot{T}(t) = pcC\cos(pct) - pcD\sin(pct)$$

5 Wärmeleitgleichung

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

Separationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{Tc^2} = \alpha$

5.1 $\alpha = 0$

5.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$

$$X'(x) = A$$

5.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow \dot{T} = 0$

$$T(t) = C$$

$$\dot{T}(t) = 0$$

5.2 $\alpha > 0$

5.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

5.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow \dot{T} - \alpha c^2 T = 0$

$$T(t) = Ce^{c^2\alpha t}$$

$$\dot{T}(t) = Cc^2\alpha e^{c^2\alpha t}$$

5.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

5.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$

$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

5.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -p^2, \quad \dot{T} + \sqrt{p}c^2 T = 0$

$$T(t) = Ce^{-c^2p^2t}$$

$$\dot{T}(t) = -Cc^2p^2e^{-c^2p^2t}$$

6 Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 u = \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots$$

Seperationsansatz: $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \alpha$

6.1 $\alpha = 0$

6.1.1 $\alpha = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X(x) = Ax + B$$
$$X'(x) = A$$

6.1.2 $\alpha = 0 \Rightarrow Y'' = 0$

$$Y(y) = Cy + D$$
$$Y'(y) = C$$

6.2 $\alpha > 0$

6.2.1 $\alpha > 0 \Rightarrow X'' - \alpha X = 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$
$$X'(x) = \sqrt{\alpha}Ae^{\sqrt{\alpha}x} - \sqrt{\alpha}Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$

6.2.2 $\alpha > 0 \Rightarrow Y'' + \alpha Y = 0$

$$Y(y) = A\sin(\sqrt{\alpha}y) + B\cos(\sqrt{\alpha}y)$$
$$Y'(y) = \sqrt{\alpha}A\cos(\sqrt{\alpha}y) - \sqrt{\alpha}B\sin(\sqrt{\alpha}y)$$

6.3 $\alpha < 0$ (am besten $\alpha = -p^2, \quad p \in \mathbb{R}_+$ definieren)

6.3.1 $\alpha < 0 \Rightarrow X'' + p^2 X = 0$

$$X(x) = A\sin(px) + B\cos(px)$$
$$X'(x) = pA\cos(px) - pB\sin(px)$$

6.3.2 $\alpha < 0 \Rightarrow Y'' - p^2 Y = 0$

$$Y(y) = Ae^{py} + Be^{-py}$$
$$Y'(y) = pAe^{py} - pBe^{-py}$$

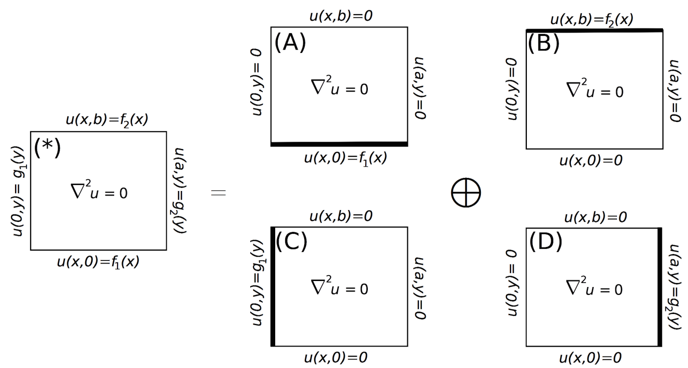
6.3.3 Anmerkung:

$$E_1 e^{ay} - E_1 e^{-ay} = E_2 \sinh(ay)$$
$$E_1 e^{ay} + E_1 e^{-ay} = E_2 \cosh(ay)$$

6.4 Allgemeine Lösung der PDE

$$u(x,y) = [C\cosh(kx) + D\sinh(kx)][A\cos(ky) + B\sin(ky)]$$

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem



Lösung für A:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{a})\sinh(\frac{n\pi(b-y)}{a})$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f_1(x)\sin(\frac{n\pi x}{a})dx$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{a})\sinh(\frac{n\pi y}{a})$$

$$B_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f_2(x)\sin(\frac{n\pi x}{a})dx$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\frac{n\pi(a-x)}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$C_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g_1(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(\frac{n\pi x}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$D_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g_2(y)\sin(\frac{n\pi y}{b})dy$$

Lösung für A+B+C+D=(*):

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

7 Dirichlet-Problem auf einem Kreis

Man kann das Problem in Polarkoordinaten umschreiben:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r = 0, \quad \text{auf } \{(r,\theta) \text{ s.d. } 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\},$$
$$u(R,\theta) = f(\theta), \quad \text{auf } \{(R,\theta) \text{ s.d. } 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

7.1 Separation der Variablen

Man nimmt an, dass die Lösung der PDE die Form

$$u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$$

besitzt. Man kann das in die PDE einsetzen:

$$F''G + \frac{1}{r^2}F\ddot{G} + \frac{1}{r}F'G = 0$$
$$r^2F''G + F\ddot{G} + rF'G = 0$$
$$(r^2F'' + rF')G = -F\ddot{G}$$
$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = \frac{-\ddot{G}}{G} = k$$

Die Randbedingungen lauten:

$$G(0) = G(2\pi)$$
$$\dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$$

7.2 Fallunterscheidung

Man versucht die DGL mit der Funktion $G(\theta)$ zu lösen:
k = 0: $\ddot{G} = 0$ Die Lösung lautet: $G(\theta) = A\theta + B$ Mit der ersten Randbedingung folgt: $G(0) = B = 2\pi A + B = G(2\pi)$ Das heißt $A = 0$. Mit der zweiten Randbedingung folgt, dass $G(\theta)$ konstant sein muss.
k < 0: $\ddot{G} - kG = 0$ Die Lösung lautet: $G(\theta) = Ce^{\sqrt{-k}\theta} + De^{-\sqrt{-k}\theta}$ Mit den Randbedingungen folgt:

$$C + D = Ce^{(\sqrt{-k})2\pi} + De^{-(\sqrt{-k})2\pi}$$
$$\sqrt{-k}C - \sqrt{-k}D = \sqrt{-k}Ce^{(\sqrt{-k})2\pi} - \sqrt{-k}De^{-(\sqrt{-k})2\pi}$$

Man addiert die beiden Gleichungen und kürzt $\sqrt{-k}$ aus der zweiten Gleichung. Es folgt: $C = 2Ce^{(\sqrt{-k})2\pi}$ Die einzige Lösung ist $C = 0$ und $D = 0$ (triviale Lösung).
k > 0: $\ddot{G} + kG = 0$ Die Lösung lautet: $G(\theta) = E\cos(\sqrt{k}\theta) + H\sin(\sqrt{k}\theta)$ Mit den Randbedingungen folgt:

$$E = E\cos(\sqrt{k}2\pi) + H\sin(\sqrt{k}2\pi)$$
$$H = -E\sin(\sqrt{k}2\pi) + H\cos(\sqrt{k}2\pi)$$

Man multipliziert die erste Gleichung mit H und die zweite mit E und vergleicht die beiden Gleichungen: $H^2\sin(\sqrt{k}2\pi) = -E^2\sin(\sqrt{k}2\pi)$ Da $-E^2 = H^2$ nie möglich ist, muss $\sin(\sqrt{k}2\pi) = 0$ gelten.
Es folgt: $G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$
Falls man $k = n^2$ in die erste Gleichung einsetzt, folgt $r^2F'' + rF' - n^2F = 0$. Dies ist eine Euler-DGL, und man findet folgende Lösung: $F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$ Man möchte aber, dass die Lösung im Gebiet beschränkt bleibt. Damit $r \to 0$ beschränkt bleibt, setzt man $Q_n = 0$. Da $u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$ sein muss, gilt: $u_n(r,\theta) = r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$
Mit dem Superpositionsprinzip kann man die Lösung für alle n schreiben als:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

8 Appendix

8.1 Umwandlungen

Gegeben: $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(\pi n) = 0 \quad ; \quad \cos(\pi n) = (-1)^n$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j+1 \\ (-1)^j, & n = 2j \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n+2}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j \\ (-1)^j, & n = 2j+1 \end{cases}$$

$$\sin(x)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos((1-n)x) - \cos((n+1)x))$$

$$\cos(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))$$

$$\sin\left((n \pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left((n \pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

8.2 Identitäten

$$(-1)^n + (-1)^{-n} = e^{in\pi} + e^{-in\pi} = 2\cos(\pi n)$$

$$(-1)^n - (-1)^{-n} = e^{in\pi} - e^{-in\pi} = 2i\sin(\pi n)$$

$$\nabla^2 = \Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

8.3 even - odd

even · even ≙ odd · odd ≙ even

even · odd ≙ odd

$$\int_{-L}^{L} \text{even} = 2\int_{0}^{L} \text{even}$$

$$\int_{-L}^{L} \text{odd} = 0$$

Jede Funktion ist aufteilbar in even & odd Teil:

$$f = f_{\text{even}} + f_{\text{odd}} = \left(\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$$

8.4 Vorgelöste Integrale

$$\int \sin^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \left[-\frac{1}{2}\cos(2nx) + \frac{1}{2}\right] dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \cos(2nx)dx + \int \frac{1}{2}dx = -\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}$$

$$\int \cos^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \left[\frac{1}{2}\cos(2nx) + \frac{1}{2}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(2nx)dx + \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}$$

$$\int \tan^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \left[\sec^2(nx) - 1\right] dx$$
$$= \frac{\sin(nx)}{n\cos(nx)} - x = \frac{1}{n}\tan(nx) - x$$

$$\int \mathbf{x}\sin(\mathbf{nx}) = -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\int \cos(nx)dx$$
$$= -\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx) = \frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$$

$$\int \mathbf{x}\cos(\mathbf{nx}) = \frac{x}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n}\int \sin(nx)dx$$
$$= \frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx) = \frac{nx\sin(nx) + \cos(nx)}{n^2}$$

$$\int \mathbf{x}\sin^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{x}{2}[-\cos(2nx) + 1]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\cos(2nx)dx$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2n}\sin(2nx) - \int \frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4n}\sin(2nx) - \frac{1}{8n^2}\cos(2nx)$$

$$\int \mathbf{x}\cos^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{x}{2}[\cos(2nx) + 1]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int xdx + \frac{1}{2}\int x\cos(2nx)dx$$
$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2n}\sin(2nx) - \int \frac{1}{2n}\sin(2nx)dx\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4n}\sin(2nx) + \frac{1}{8n^2}\cos(2nx)$$

$$\int \sin(\mathbf{kx})\cos(\mathbf{nx}) = \frac{1}{2}\int [\sin(x(k-n)) + \sin(x(k+n))]dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin(xk - xn)dx + \int \sin(xk + nx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(xk - xn)}{k-n} - \frac{\cos(xk + xn)}{k+n}\right]$$

$$\int \sin(\mathbf{kx})\sin(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \left[\frac{1}{2}\cos(kx - nx) - \frac{1}{2}\cos(kx + nx)\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(kx - nx)}{k-n} - \frac{\sin(kx + nx)}{k+n}\right]$$

$$\int \cos(\mathbf{kx})\cos(\mathbf{nx})\mathrm{dx} = \int \left[\frac{1}{2}\cos(kx - nx) + \frac{1}{2}\cos(kx + nx)\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(kx - nx)}{k-n} + \frac{\sin(kx + nx)}{k+n}\right]$$

$$\int \cos(\mathbf{kx})\cos^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{1}{2}[\cos(2nx) + 1]\cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\cos(kx)\cos(2nx)dx + \int \cos(kx)\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\cos(kx - 2nx) + \frac{1}{2}\cos(kx + 2nx)\right] dx + \frac{1}{2}\int \cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{\sin(x(k-2n))}{k-2n}\right] + \frac{1}{2k}\sin(kx)$$

$$\int \sin(\mathbf{kx})\sin^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{1}{2}[1 - \cos(2nx)]\sin(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\int \sin(kx)\cos(2nx)dx + \int \sin(kx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\sin(kx - 2nx) + \frac{1}{2}\sin(kx + 2nx)\right] dx + \frac{1}{2}\int \sin(kx)dx$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos(kx + 2nx)}{k+2n} + \frac{\cos(kx - 2nx)}{k-2n}\right] - \frac{1}{2k}\cos(kx)$$

$$\int \sin(\mathbf{kx})\cos^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{1}{2}[\cos(2nx) + 1]\sin(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int [\sin(kx)\cos(2nx) + \sin(kx)]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\sin(kx - 2nx) + \frac{1}{2}\sin(kx + 2nx)\right] dx + \frac{1}{2}\int \sin(kx)dx$$
$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{\cos(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{\cos(x(k-2n))}{k-2n}\right] - \frac{1}{2k}\cos(kx)$$

$$\int \cos(\mathbf{kx})\sin^2(\mathbf{nx})\mathbf{dx} = \int \frac{1}{2}[1 - \cos(2nx)]\cos(kx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int [-\cos(kx)\cos(2nx) + \cos(kx)]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\cos(kx - 2nx) + \frac{1}{2}\cos(kx + 2nx)\right] dx + \frac{1}{2}\int \cos(kx)dx$$
$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{\sin(x(k+2n))}{k+2n} + \frac{\sin(x(k-2n))}{k-2n}\right] + \frac{1}{2k}\sin(kx)$$

8.5 Allgemein Integral

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \\ 2L & \text{für } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall n, m$$

Nach Integral:

$$\sin(nx)|_0^{2\pi} = 0 \quad ; \cos(nx)|_0^{2\pi} = 0$$
$$x\sin(nx)|_0^{2\pi} = 0 \quad ; \quad x\cos(nx)|_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0$$

8.6 Integraltafel

8.6.1 Integrale ($\sqrt{\cdots}$, etc...)

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$$

$$\int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln|px+q|$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

8.6.2 Integrale ($\sin(ax), \cos(ax), \tan(ax)$)

$$\int \sin(ax)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}$$

$$\int \cos(ax)^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}$$

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(ax) dx = -\frac{\cos(ax)^2}{2a}$$

$$\int \sin(x) \cdot e^x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))$$

$$\int \cos(x) \cdot e^x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) + \cos(x))$$

$$\int x^2 \cdot \sin(ax) dx = \frac{1}{a^3}\left[-a^2x^2\cos(ax) + 2\cdot\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right]$$

$$\int x^2 \cdot \cos(ax) dx = \frac{1}{a^3}\left[a^2x^2\sin(ax) - 2\cdot\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right]$$

$$\int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln|\cos(ax)|$$

$$\int \arcsin(x) dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1+x^2\right)$$

8.6.3 Integrale ($e^{ax} und ln(x)$)

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) \cdot e^{ax}$$

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j \neq 0 \end{cases}$$

8.6.4 Integrale Fota

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$\int \left(ax^p+b\right)^s x^{p-1} dx = \frac{(ax^p+b)^{s+1}}{ap(s+1)} + C, \quad s \neq -1, a \neq 0, p \neq 0$$

$$\int \left(ax^p+b\right)^{-1} x^{p-1} dx = \frac{1}{ap} \ln\left|ax^p+b\right| + C, \quad a \neq 0, p \neq 0$$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln|cx+d| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{1}{k \cdot \ln(a)} a^{kx} + C$$

$$\int e^{kx} \sin(ax+b) dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\sin(ax+b) - a\cos(ax+b)) + C$$

$$\int e^{kx} \cos(ax+b) dx = \frac{e^{kx}}{a^2+k^2}(k\cos(ax+b) + a\sin(ax+b)) + C$$

$$\int \ln|x| dx = x(\ln|x| - 1) + C$$

$$\int \log_a |x| dx = x\left(\log_a |x| - \log_a e\right) + C$$

$$\int x^k \ln x dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x - \frac{1}{k+1}\right) + C, \quad k \neq -1$$

$$\int x^{-1} \ln x dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{2}{\tan x} dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x + C$$

$$\int \operatorname{arsinh} x dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int \operatorname{arcosh} x dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \operatorname{artanh} x dx = x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) + C$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx = \int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$$
$$\sin\left(90^\circ \pm \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\sin\left(180^\circ \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos\left(90^\circ \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos\left(180^\circ \pm \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$
$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

8.8 Ableitungen

$$(\log_a|x|)' = (\log_a e)\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$$
$$(a^{cx})' = (c\ln a)a^{cx}$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

8.9 Euler-Beziehungen

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$
$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\tan(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{(e^{x} + e^{-x})}$$
$$\sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1$$

$$e^{k\pi i} = \{1 \text{ für k} = 0, \pm 2, \cdots \quad -1 \text{ für k} \pm 1, \pm 3, \cdots$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$$

8.10 Logarithmen

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$$
$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$
$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln(v)$$
$$\ln\left(u^r\right) = r\cdot\ln(u)$$
$$\ln|y|\cdot C = \ln\left|y^C\right|$$
$$-\ln|r| = \ln\left|r^{-1}\right|$$
$$\ln(1) = \log(1) = 0$$

8.11 Geometrie

Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Kugeloberfläche $A = 4\pi r^2$

8.12 Periodizität

$e^{i\sqrt{x}}$ ist nicht periodisch.
$e^{\sqrt{2}ix}$ ist periodisch.

8.13 Partialbruchzerlegung - Ergänzung

PBZ bei doppelter Nullstelle

$$\frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} \Rightarrow \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1}$$

oder

$$\frac{s-5}{(s-2)^2} \Rightarrow \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2}$$

Dann Koeffizientenvergleich

8.14 Komplexe Zahlen

Normalform: $z = x + iy$
Polarform: $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Exponntialform: $z = re^{i\varphi}$ $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

8.14.1 Operationen

Normalform:

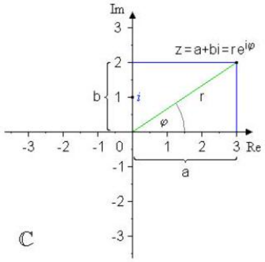
$z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$
$z_1 z_2$	$(x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$
$z^{-1} = \frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Polarform:

$z_1 z_2$	$r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$z^{-1} = \frac{1}{z}$	$r^{-1}e^{-i\varphi}$
$\frac{z_1}{z_2}$	$\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$z^n, n \in \mathbb{Z}$	$r^ne^{in\varphi}$ (DE MOIVRE)

Beträge:

$r = |z| \geq 0 \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$|zw| = |z||w| \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
$|z + w| \leq |z| + |w|$



9 Zweidimensionale Wellengleichung

Gegeben:

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$
$$(x, y) \in [0, a] \times [0, b], \quad t > 0$$
$$u(0, x, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$
$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

Allgemeine Lösung

$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \cos(\lambda_{mn} t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + B_{mn} \sin(\lambda_{mn} t)) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]$

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$
$$\sum_{k,l=1}^{\infty} A_{kl} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) = f(x, y)$$
$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dydx$$
$$\sum_{k,l=1}^{\infty} B_{kl}\lambda_{kl} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) = g(x, y)$$
$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dydx$$

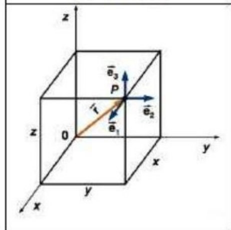
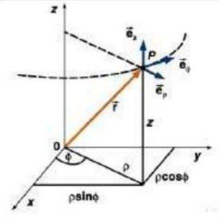
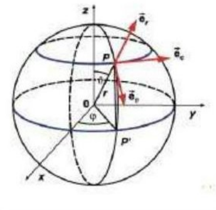
10 Trigonometrie (Fota S.97-99)

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	**T**	0-Stellen
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	$2\cdot\pi$	$k\cdot\pi$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	$2\cdot\pi$	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	π	$k\cdot\pi$
$\cot\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-$	π	$\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ $\quad\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$
$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ $\quad\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$
$e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$ $\quad e^{-2ix} = \cos(2x) - i\sin(2x)$
$\sec(x) = \frac{2\cos(x)}{\cos(2x)+1}$

11 Koordinatentransformation

Zylinderkoordinaten
$dx = \cos\varphi\cdot d\rho - \rho\sin\varphi\cdot d\varphi$ $\quad dy = \sin\varphi\cdot d\rho + \rho\cos\varphi\cdot d\varphi$ $dA = \rho\cdot d\rho\cdot d\varphi$
Sphärische Koordinaten
$dA = r^2\cdot\sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta$ $\quad dV = r^2\cdot\sin\theta\cdot d\psi\cdot d\theta\cdot dr$
$0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \psi \le 2\pi$
Ellipsenkoordinaten
$x = a\cdot r\cos(\varphi) \quad y = b\cdot r\sin\varphi \quad z = 0$
$dA = abrdrd\varphi$

kartesisch	zylindrisch	sphärisch
	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\psi=\arctan\frac{y}{x}$
$x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$ $z=z$		$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta=\arctan\frac{\rho}{z}$ $\psi=\varphi$
$x=r\sin\theta\cos\psi$ $y=r\sin\theta\sin\psi$ $z=r\cos\theta$	$\rho=r\sin\theta$ $\varphi=\psi$ $z=r\cos\theta$	

12 Ableitungsregeln (Fota S.63-65)

12.1 Produktregel

$(f(x)\cdot g(x))' \rightarrow f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

12.2 Quotientenregel

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \rightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

12.3 Verallgemeinerte Kettenregel

$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\cdot\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\cdot\dot{y}(t)$

13 Integralregeln (Fota S.70-72)

13.1 Integral mit Fkt. als Grenze

$\int_a^{g(x)} f(u)\cdot du = f(g(x))\cdot g'(x)$

13.2 Partielle Integration

$\int u'\cdot vdx = u\cdot v - \int u\cdot v'dx \quad \int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot vdx$

13.3 Substitutionsregel

$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\cdot dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z)\cdot dz$, wobei $z = u(x)$

14 Vektoranalysis (Fota S.102-105)

14.1 Skalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

14.2 Vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

14.3 Differentialoperatoren

$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\right)$
$\mathrm{div}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z)\right)$
$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$

15 Partialbruchzerlegung

1. einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)}$
2. doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
3. komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{(z\cdot B:x^2+1)}$

Beispiel : $\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$
$= \frac{A\cdot(x+1)\cdot(x-1)+B\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)+C\cdot(x+1)^3}{(x+1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

$$\left|\begin{array}{c} -A - B + C = 0 \\ -B + 3C = 1 \\ A + B + 3C = 0 \\ B + C = 0 \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$$

Tipp: $(1 + x^3) = (1 + x)(1 - x + x^2)$

16 Asymptoten (Fota S.66)

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{A(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ⇒ Bernoulli-L'Hopital
2. $A(x) = mx + b \quad \rightarrow \quad m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \rightarrow b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$
3. Allgemein: $\lim_{x\to\infty}(f(x) - A(x)) = 0$
   a) Höchste Nennerordnung kürzen, $\lim_{x\to\infty}$ bilden ⇒ $a_1 = \ldots \rightarrow$ konstante Terme fallen weg!

b) Gefundenen Term von Ursprungsfkt. abziehen $\rightarrow$ Zähler wird um eine Ordnung kleiner

c) $\lim_{x\to\infty}$ bilden, Nennerordnung kürzen $\Rightarrow a_2 =$..

d) $A(x) = a - 1 + a_2 + \ldots$

17 Bernoulli-L'Hopital (Fota S.61)

Falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
$\rightarrow$ beide Fkt. müssen gegen 0 oder ∞ gehen!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

18 Folgen (Fota S.38-41 + S.51-54)

Satz: Ist eine Folge monoton wachsend und beschränkt, so ist sie konvergent.
Konvergente Folge: besitzt einen Grenzwert.
Eine Folge ohne Grenzwert ist divergent.
Konkav: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
Konvex: $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$
$t \in [0,1]$, strikt wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.

18.1 Grenzwerte (Fota S.61-62)

1. Wurzel: erweitern nach 3. Binom. Formel

2. Beträge: links- und rechts. Grenzw. separieren

3. $e^x >> x^k >> \sqrt{x} >> \ln(x)$

$\lim_{x\to\infty} \frac{BLA1}{BLA2}$

1. Höchste Potenz kürzen $\Rightarrow$ niedrigere Potenz gegen 0

2. Gehen Zähler und Nenner gegen ∞ oder 0 $\Rightarrow$ Regel von Bernoulli-L'Hopital (evtl. mehrfach)

3. Partialbruchzerlegung $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} \cdot \frac{bla1}{\text{bla 2}}$ $\rightarrow$ Nenner-Nst. ausklammern $\lim_{x\to x_o} = \frac{A}{BLA1} + \frac{B}{BLA2}$

4. $\frac{1}{x}$ durch y substituieren $\rightarrow \lim_{x\to\infty} = \lim_{y\to 0} \Rightarrow$ Bernoulli-L'Hopital anwendbar

5. Sandwichsatz: Folgen a_n, b_n, c_n mit $a_n \leq b_n \leq c_n$
   - $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} c_n = l \rightarrow \lim_{x\to\infty} b_n = l$

18.2 Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to \pm\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{x} = \mp\infty$
$\lim_{x\to 0} = \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$	$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$	$\lim_{x\to 0} x^a \cdot \ln n^b(x) = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e^2}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$	

19 Ableitungen (Fota S.63-65)

19.1 Ableitung der Umkehrfunktion (Inverse)

$$g = f^{-1}(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

19.2 Ableitung von Kurve in Parameterdarstellung

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad ; \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

19.3 Ableitung in Polarkoordinaten

$\rightarrow$ Aus $x(t)$ und $y(t)$ wird $r(\phi)$

$$x(\phi) = r(\phi) \cdot \cos(\phi) \quad ; \quad y(\phi) = r(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)\cos(\phi)}{\dot{r}(\phi)\cos(\phi) - r(\phi)\sin(\phi)}$$

20 Partielle Ableitungen

20.1 Richtunsableitung

$\rightarrow$ Änderungsgrad der Fkt. in geg. Richtung $\vec{r}$

$$D_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \mathrm{grad}(f(x,y,z))$$

Definition: $D_{u,v}f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(h\dot{u}, h\dot{v}) - f(0,0)}{h}$

20.2 Satz von Schwarz

Wenn f_{xy} und f_{yx} stetig, dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$

20.3 Satz vom Maximum

Bereich A abgeschlossen und beschränkt, f stetig auf A
$\Rightarrow \exists$ mind. eine Max/Minstelle $(x_0, y_0) \in$ A

20.4 Hesse-Matrix

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ positiv def $\Rightarrow$ lok. Min
negativ def $\Rightarrow$ lok. Max, nicht def $\Rightarrow$ Sattel$\sqrt{k}t$.

20.5 Laplace Operator

$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\varphi\varphi} + f_{zz}$
$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \cot(\theta) f_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} f_{\varphi\varphi}$

21 Integrale (Fota S.70-74)

21.1 Hauptsatz der Integralrechnung

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

21.2 Leibnizsche Regel

Bedingung: $f(x,t)$ stetig im Intervall
$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = f\left(x, (v(x)) \cdot v'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)dt\right.$
$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow$ Nur im Spezialfall

21.3 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliches Integral 1. Ordnung: $\rightarrow$ Integral bis ∞

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$$

- Uneigentliches Integral 2. Ordnung: $\rightarrow$ Polstellen oder Definitionslücken

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

21.4 Ansätze für Integrale

1. Substitution
2. Partielle Integration
3. Partialbruchzerlegung
4. Probieren mit Hilfe von Ableitung
5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + \mathbf{C}$
6. Wurzelintegrale:
   a) Quadratisch Ergänzen, s.d. $k\left(1 - u^2\right)$ oder $k\left(u^2 \pm 1\right)$
   b) Sub: $\sqrt{u^2+1} \Rightarrow u = \sinh(t)$; $\sqrt{u^2-1} \Rightarrow u = \cosh(t)$ $\sqrt{1-u^2} \Rightarrow u = \sin(t)$

21.5 Substitutionen

Integral	Subst.	Bemerkungen
$f(ax+b)$	$t = ax+b$	
$f(g(x))g'(x)$	$g(x) = t$	$= \int f(t)dt$
$f(x, \sqrt{ax+b})$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$t \geq 0$
$f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$	$x = a\sin(t)$	$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos(t)$
$f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)$	$x = a\sinh(t)$	$\sqrt{a^2+x^2} = a\cosh(t)$
$f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$	$x = a\cosh(t)$	$\sqrt{x^2-a^2} = a\sinh(t)$
$f(\sin(x), \cos(x))$	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
$f\left(e^x, \sinh, \cosh\right)$	$t = e^x$	$\sinh(x) = \frac{t^2-1}{2t}$ $\cosh(x) = \frac{t^2+1}{2t}$

21.6 Integraltabelle

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\sin^4$	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\cos^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\cos^4$	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin^2\cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

21.7 Wichtige Integrale Fota (S.72 - 74 + S. 65)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int f'(x)\cdot f(x)dx = \frac{1}{2}\left(f^2(x)\right) + C$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$$

$$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$$

$$\int \frac{x}{(ax+b)^n}dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx = -\frac{1}{2(n-1)\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}dx = \frac{1}{2(n-1)\left(a^2-x^2\right)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{artanh}(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + C, |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, 1 \leq x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x) + C$$

$$\int \sin^3(x)dx = \frac{1}{12}(\cos(3x) - 9\cos(x)) + C$$

$$\int \sin^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)) + C$$

$$\int \cos^3(x)dx = \frac{1}{12}(9\sin(x) + \sin(3x)) + C$$

$$\int \cos^4(x)dx = \frac{1}{32}(12x + 8\sin(2x) + \sin(4x)) + C$$

$$\int \sin^{\frac{3}{2}}(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

$$\int \cos^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \sin(x)\cos(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \frac{1}{32}(4x - \sin(4x)) + C$$

$$\int \sin^n(ax)\cdot\cos(ax)dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int \sin(ax)\cdot\cos^n(ax)dx = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C$$

$$\int \tan^3(x)dx = \frac{\sec^2(x)}{2} + \ln(\cos(x)) + C$$

$$\int \tan^4(x)dx = x + \frac{1}{3}\tan(x)\left(\sec^2(x) - 4\right) + C$$

$$\int \cot(x)dx = \log(\sin(x)) + C$$

$$\int \coth(x)dx = \log(\sinh(x)) + C$$

$$\int \frac{\cos(ax)}{\sin^n(ax)}dx = -\frac{1}{(n-1)a\cdot\sin^{n-1}(ax)} + C$$

$$\int \frac{1}{e^x+a}dx = \frac{x - \ln\left(a+e^x\right)}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{e^x-a}dx = \frac{\ln\left(e^x-a\right) - x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = \ln(x) - \ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{1}{2ax^2+bx+c}dx = \frac{2an\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$$

$$\int x\cdot e^{ax}dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)\cdot e^{ax} + C \qquad (7)$$

$$\int x^2\cdot e^{ax}dx = \left(\frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3}\right)\cdot e^{ax}$$

$$\int \frac{1}{p+q\cdot e^{ax}}dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\cdot\ln\left|p+q\cdot e^{ax}\right| + C$$

$$\int \frac{e^{ax}}{p+q\cdot e^{ax}}dx = \frac{1}{ap}\cdot\ln\left|p+q\cdot e^{ax}\right|$$

$$\int e^{ax}\cdot\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cdot\sin(bx) + b\cdot\cos(bx)] + C$$

$$\int e^{ax}\cdot\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cdot\cos(bx) + b\cdot\sin(bx)] + C$$

$$\int x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2} + C$$

$$\int \frac{(\ln(x))^n}{x}dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{x+1} + C$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

21.8 Satz von Stokes

$A = \iint \operatorname{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}dO \rightarrow$ ($\vec{n}$ normiert!!!) $(zB.: dO = dx\cdot dy)$

22 Differentialoperatoren

$$\operatorname{grad}(f) = \nabla f(x,y,z) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \left(\tfrac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z) + \tfrac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z) + \tfrac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y\cdot v_3 - \partial_z\cdot v_2 \\ \partial_z\cdot v_1 - \partial_x\cdot v_3 \\ \partial_x\cdot v_2 - \partial_y\cdot v_1 \end{pmatrix}$$

22.1 Zusammensetzungen von Differentialoperatoren

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f \rightarrow$ Laplace-Operator
$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) \equiv (0,0,0)$
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{v})) \equiv 0$
$\mathrm{div}(f \cdot \mathrm{rot}(\vec{v}) = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{rot}(\vec{v})$
$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}(\vec{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{v})) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$
$\mathrm{div} = 0 \Rightarrow$ Quellfrei, $\mathrm{rot} = 0 \Rightarrow$ Wirbelfrei.
$\mathrm{div} = rot = 0 \Rightarrow$ Harmonisch

23 Differentialgleichungen (Fota S.81-82)

23.1 lineare homogene DGL 1.Ordnung

Form: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right)$
simpel: $y'(x) = f(x) \rightarrow y(x) = \left[\int f(x)dx\right] + C$
separiebar: $y'(x) = \frac{f(x)}{h(y)} \rightarrow \int h(y)dy = \left[\int f(x)dx\right] + C$

$y' = p(x) \cdot y$ (immer separierbar):

1. Substitution $y' = \frac{dy}{dx}$
2. Separieren $\rightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = p(x) \cdot dx$
3. Integrieren $\rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \left[\int p(x)dx\right] + \mathbf{C}$

Substitutionen: $\rightarrow$ Achtung Rücksubstitution!

- $y'(x) = f(ax + by(x) + c)$: $Sub : u(x) = ax + by(x) + c$
  $\Rightarrow u'(x) = a + b \cdot f(u)$
- $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$: Sub : $u(x) = \frac{y}{x}$
  $\rightarrow y = u(x) \cdot x$
  $\Rightarrow y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$
- $y'(x) = (y(x) + f(x))^2$: $Sub : u(x) = y(x) + f(x)$
  $\rightarrow y(x) = u(x) - f(x)$
  $\Rightarrow y'(x) = u'(x) - f'(x)$

Tipp: DGL-Form: $u' \cdot y + u \cdot y' = (uy)' \rightarrow$ Integral

23.2 lineare inhomogene DGL 1.Ordnung

$y' = p(x) \cdot y + q(x)$

1. Lösen der homogenen DGL wie oben
   $\Rightarrow y_h = y' + ay = 0$
1. Finde partikuläre Lösung mit:
   - Ansatz von Tabelle $\rightarrow \mathbf{3.1}$
   - Ansatz von Lagrange $\rightarrow \mathbf{4.1}$
     3.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y'$
     3.2 y und y' in Anfangsgleichung einsetzen
     3.3 Konstanten bestimmen $\rightarrow \mathbf{5.}$
5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Störfunktion	Ansatz für $\mathbf{y_p}$
Konstante	$\mathbf{y_p = A}$
lin. Fkt.	$\mathbf{y_p = Ax + B}$
quadr. Fkt.	$\mathbf{y_p = Ax^2 + Bx + C}$
Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Zx^n}$
$A\sin(\omega x)$ $B\cos(\omega x)$ $C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$	$\mathbf{y_p} = \mathbf{C}\sin(\omega\mathbf{x}) + \mathbf{D}\cos(\omega\mathbf{x})$
$A \cdot e^{bx}$	$\mathbf{y_p = C \cdot e^{bx}}$ oder falls $b = -a$: $\mathbf{y_p = Cx \cdot e^{bx}}$

Ansatz von Lagrange
4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot \ldots$
4.2 Konstante C als veränderliche Fkt.: $C = C(x) \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot \ldots$
4.3 Ableiten: $y'(x) = C'(x) \cdot \ldots$ $\rightarrow$ Produktregel!
4.4 Einsetzen in die inhomogene DGL

4.5 Lösen nach $C(x) \rightarrow$ meist partielle Integration

4.6 Lösung für $C(x)$ in Lösung von y_h einsetzen $\rightarrow \mathbf{5}$

23.3 Exakte DGL

Beschreiben Niveaulinien einer Funktion
$\Phi(x, y) + \Psi(x, y) \cdot y' = 0$
Bedingung:

- $\Phi_y(x, y) = \Psi_x(x, y) \forall (x, y) \in$ Def. Bereich
- Def. Bereich muss einfach zusammenh. sein. Lösen:

$\int \Phi(x, y)dx + \alpha(y) = \int \Psi(x, y)dy + \beta(x) = u(x, y)$
$\rightarrow \alpha(y)$ und $\beta(x)$ durch Koeff.vergl. finden
$u(x, y) + C = 0 \rightarrow$ nach y lösen $\Rightarrow y_h$

23.4 Bernoulli DGL

$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x) \cdot y^n$

1. Substitution: $u = y^{1-n}$
2. $\Rightarrow u' = (1 - n)y^{-n}$
3. Ansatz in DGL einsetzen, nach u' auflösen
4. y_h lösen $\rightarrow$ Rücksubstitution

23.5 Homogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$

1. Setze $y = e^{\lambda x}$
2. $\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow$ char. Polynom
3. Löse das char. Polynom:
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Rightarrow y = C_1 e^{cx} + C_2 x e^{cx}(c \in \mathbb{R})$
   C) $\lambda_{1,2} = d \pm i\omega \rightarrow$ komplex konjugiert
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\right)$
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right)$
4. Falls kein Störterm vorhanden ist $\rightarrow$ Randbedingungen

23.6 Inhomogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = g(x)$

1. Lösen der homogenen DGL wie oben
2. Finde partikuläre Lösung mit
   A) Ansatz von Tabelle $\rightarrow \mathbf{3.1}$
   B) Ansatz von Lagrange $\rightarrow \mathbf{4.1}$
   3.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y', y''$
   3.2 y, y' und y'' in Anfangsgleichung einsetzen
   3.3 Konstanten bestimmen $\rightarrow \mathbf{5.}$
5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Störfunktion	Ansatz für $\mathbf{y_p}$
Polynom n-Grades	$b \neq 0$ $\quad \mathbf{y_p = Q_n(x)}$ $a \neq 0; b = 0$ $\quad \mathbf{y_p = xQ_n(x)}$ $a = 0; b = 0$ $\quad \mathbf{y_p = x^2Q_n(x)}$
e^{cx}	c ist keine Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist doppelte Lsg. $\quad \mathbf{y_p = Ax^2e^{cx}}$
$A\sin(\omega x)$ $B\cos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p} = \mathbf{Csin}(\omega\mathbf{x}) + \mathrm{D}\cos(\omega\mathbf{x})$ $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p} = \mathbf{x}(\mathbf{Csin}(\omega\mathbf{x}) + \mathrm{D}\cos(\omega\mathbf{x}))$
$\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{y_p = A \cdot \ln\|x\|}$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2} + \ldots}$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2} \cdot \ldots}$ $\rightarrow$! Funktioniert nicht immer !

Ansatz von Lagrange für DGL 2.Ordnung
4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C.$
4.2 Konstante C_1, C_2 als veränderliche Fkt.:
$C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$
4.3 DGL $\Rightarrow y(x) = C_1(x)u(x) + C_2(x)v(x)$
4.4 Wir treffen folgende Annahme:
$C_1'u + C_2'v = 0$
$C_1'u' + C_2'v' = g(x)$
4.5 $y' = C_1u' + C_2v'$
$y'' = C_1'u' + C_1u'' + C_2'v' + C_2v''$
4.6 Löse für C_1' und C_2' :
$C_1' = \frac{g(x) \cdot v}{u'v - uv'}$
$C_2' = -\frac{g(x) \cdot u}{u'v - uv'}$
4.7 C_1 und C_2 durch Integration finden (Integrationskonstante weglassen) $\rightarrow \mathbf{5}$

23.7 DGL n-ter Ordnung

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

1. Kommen nur Ableitungen von y vor?

   1.1 Substituiere y' mit $u \Rightarrow$ Grad der DGL $= n-1$

2. Setze $y = e^{\lambda x}$

3. Finde charakteristisches Polynom für y_h :
   $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$
   A) Alle Lsg. sind reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2 + \ldots$

   $\Rightarrow y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}; y_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}$

   $\Rightarrow y(x) = y_1 + y_2 + \ldots = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots$

   B) $\lambda = \alpha$ ist eine r-fache Lsg. des char. Poly.: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = \alpha$

   $\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}; y_2 = xe^{\alpha x}; \ldots; y_1 = x^{r-1}e^{\alpha x}$

   $\Rightarrow y(x) = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_r x^{r-1}\right) e^{\alpha x}$

   C) $\lambda_{1,2} = a \pm i\omega$ eine einfach konj. komplexe Lsg.:

   $\Rightarrow y_1 = e^{ax}\sin(\omega x); y_2 = e^{ax}\cos(\omega x)$

   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}\left(C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x)\right)$

   D) r-fache konj. komplexe Lsg.:

   $\Rightarrow$ Ersetze Konstanten C_1 und C_2 durch $C_1(x)$ und $C_2(x)$ vom Grad r

   $\Rightarrow y(x) = e^{ax}\left(C_1(x)\sin(\omega x) + C_2(x)\cos(\omega x)\right)$

4. Finde partikuläre Lösung mit Tabelle ($\nexists$ Lagrange)

   4.1 Ansatz ableiten $\rightarrow y', y'', \ldots, y^{(n)}$

   4.2 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ in Anfangsgleichung einsetzen

   4.3 Konstanten bestimmen

5. $y = y_h + y_p \rightarrow$ Randbedingungen

Tipp: Char. Poly:: $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
$\rightarrow$ mit $(\lambda - 1)$ multiplizieren
$\Rightarrow$ ergibt zusätz. Nullst. für $\lambda = 1 \rightarrow$ **De Moivre (Fota S.18)**

Störfunktion	Ansatz für $\mathbf{y_p}$
Polynom n-Grades	$\mathbf{y_p = A + Bx + Cx^2 + \ldots}$
$m \cdot e^{cx}$	c ist keine Lsg. $\mathbf{y_p = Ae^{cx}}$ c ist einfache Lsg. $\mathbf{y_p = Axe^{cx}}$ c ist r-fache Lsg. $\mathbf{y_p = Ax^r e^{cx}}$
$A\sin(\omega x)$ $B\cos(\omega x)$ lin-Komb.	$i\omega$ ist keine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = Csin(\omega x)}$+ Dcos (ωx) $i\omega$ ist eine Lsg. des char. Poly.: $\mathbf{y_p = x(Csin(\omega x)}$+ Dcos $(\omega x))$
Summe von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} + y_{p2} + \ldots}$
Produkt von Störfkt.	$\mathbf{y_p = y_{p1} \cdot y_{p2} \cdot \ldots}$ $\rightarrow$! Funktioniert nicht immer !

23.8 Eulersche DGL n-ter Ordnung

$a_n y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = 0$

1. Setze $y = x^\alpha$

2. Finde das Indexpolynom:
   ...$+a_3(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha + a_2\alpha(\alpha-1) + a_1\alpha + a_0 = 0$

3. Finde Nullstellen des Indexpolynoms
   3.1 Ist α eine k-fache reelle Nullstelle:

   $x_1 \rightarrow x^\alpha, x_2 \rightarrow \ln(x)\cdot x^\alpha, \ldots, x_k \rightarrow (\ln(x))^{k-1}\cdot x^\alpha$

   3.2 Ist $\alpha = a + ib, \bar{\alpha} = a - ib, b \neq 0$ ein Paar konj. kompl. k-facher Nullstellen:

   $x_1 \rightarrow x^\alpha \cos(b \cdot \ln x)$

   $x_2 \rightarrow x^\alpha \sin(b \cdot \ln x)$

   $x_3 \rightarrow (\ln x)x^\alpha \cos(b\cdot\ln x) \quad ; \quad x_4 \rightarrow (\ln x)x^\alpha \sin(b\cdot \ln x)$

   $x_{k-1} \rightarrow (\ln x)^{k-1}x^\alpha\cos(b\cdot\ln x); x_k \rightarrow (\ln x)^{k-1}x^\alpha \sin(b\cdot\ln x)$

4. $y_h(x) = A\cdot x_1 + B\cdot x_2 + \ldots + Z\cdot x_n$

23.9 DGL Systeme

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ von x unabhängig $\Rightarrow$ autonom

DGL System: $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = f_1(x,y) \\ \dot{y}(t) = f_2(x,y) \end{bmatrix}$

Phasenportrait: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$

$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b1 \\ \dot{y}(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b2 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{\dot{z}} = A\cdot\vec{z} + \vec{b}, \vec{z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Störterm $\vec{b} = 0 \rightarrow$ System homogen
- Ordnung: Summe der Ordnungen des Systemes
- DGL abhängig voneinander $\rightarrow$ gekoppelt, sonst entkoppel

Lösen über char. Polynom $\rightarrow$ gut für hom. DGl:

1. Bestimme Eigenwerte $(A - \lambda\vec{I}) = 0$

   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2$(reel) $\Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$(reel) $\Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda t}$
   C) $\lambda_{1,2} = a \pm ib \Rightarrow x(t) = e^{at}\left(C_1\sin(bt) + C_2\cos(bt)\right)$

2. Wenn $\vec{b} \neq 0 \Rightarrow$ finde allg. Lösung von $x(t)$

3. f_2 in f_1 einsetzen $\Rightarrow y(t)\ldots$

Lösen über Entkoppelung des Systems: $\rightarrow$ gut für inhom. DGL

1. Bestimme Eigenwerte: $(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$

2. Bestimme Eigenvektoren $\rightarrow$ ist A halbeinfach? $(gV = aV)$
   A) A ist halbeinfach (= diagonalisierbar) $\rightarrow \mathbf{3.1}$
   B) A ist nicht halbeinfach $\rightarrow \mathbf{4.1}$

3. $T^{-1}AT = D$
   3.1 Hat A doppelte Eigenwerte? Ja $\Rightarrow 4.1$
   3.2 $z = Tz \rightarrow y' = Tz' \rightarrow z' = T^{-1}ATz \rightarrow z' = Dz$
   3.3 Löse $z' = Dz \rightarrow z = \ldots$
   3.4 $y = Tz$

4. A nicht diagonalisierbar und/oder EW doppelt
   4.1 $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) = a\cdot x + b\cdot y \\ \dot{y}(t) = c\cdot x + d\cdot y \end{bmatrix} \rightarrow y = \frac{\dot{x} - ax}{b} \rightarrow \dot{y} = \frac{\ddot{x} - a\dot{x}}{b}$
   4.2 Einsetzen: $\dot{y} = c\cdot x + d\left(\frac{\dot{x}-ax}{b}\right)$
   $\rightarrow \frac{\ddot{x} - a\dot{x}}{b} = c\cdot x + d\left(\frac{\dot{x}-ax}{b}\right)$
   4.3 $\Rightarrow \frac{1}{b}\ddot{x} - \frac{a+d}{b}\dot{x} + \frac{ad-cb}{b}x = 0$
   4.4 DGL auflösen und allg. Lösung in System einsetzen und auflösen

23.10 Gleichgewichtspunkte

Dort wo $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ keine Änderung in x und y
Durchlaufsinn:
Richtung, welche sich mit steigendem t die Kurve bewegt:

$\dot{x} > 0 \rightarrow$ immer $\curvearrowright$ (positive Steigung)

$\dot{y} < 0 \rightarrow$ immer $\curvearrowleft$ (negative Steigung)

Nicht lineare Systeme müssen linearisiert werden!
Für Durchlaufsinn:
Falls $\dot{x} < 0$ und $\dot{y} > 0 \rightarrow$ Intuition oder einfach probieren

24 Potenzreihen (Fota S.79)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n \rightarrow$ Entwicklungs$\sqrt{k}t$.x$_0$; Koeff. a_n
Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$
$\forall x$ *mit* $|x - x_0| < r \rightarrow$ *konv.*, $\forall x$ *mit* $|x - x_0| > r \rightarrow$ *div.*
Finde Taylorreihe
$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$
Integral? $\Rightarrow$ 1.Ableitung: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$
Finde erste k Koeffizienten der Potenzreihenentw.

A) Terme höher als x^k streichen
B) Integral: $\Rightarrow$ Terme höher x^{k-1} streichen
C) Quadrat? Ausrechnen, zu hohe Terme streichen

Finde komplette Potenzreihenentw. um $x_0 = a$

A) Taylorentwicklung: Ableiten, einsetzen,..
B) Funktion in bekannte Reihe umformen
C) Ableitung/Integral als Reihe darstellbar?
D) Partialbruchzerlegung
E) Funktion als Summe/Produkt bekannter Reihen

Funktion= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ Koef.-Vergleich
F) Funktion ungerade? $\rightarrow a_0, a_2, a_4, \ldots = 0$
G) Bruch? $\Rightarrow$ Nenner auf linke Seite, Koeff.-Vergl.

Bsp: $\ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$ bei $x_0 = 1$

1. Ersetze x durch x_0, schreibe Summe aus

$\ln(x_0) = a_0 + a_1 (x_0 - 1)^1 + a_2 (x_0 - 1)^2 +$

2. Setze x_0 ein, finde a_0

$0 = a_0 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 \Rightarrow a_0 = 0$

3. Leite beide Seiten ab

$\frac{1}{x_0} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 (x_0 - 1) + a_3 \cdot 3 (x_0 - 1)^2 + \ldots$

4. Setze x_0 ein , finde a_1

$\frac{1}{1} = a_1 + 0 + \ldots \Rightarrow a_1 = 1$

5. Leite weiter ab, finde mehrere a_n

$a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; \ldots$

6. Finde Bildungsschema der a_n

$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}; k \geq 1$
$\rightarrow$ Achtung: Teillösung nicht vergessen: $a_0 = 0$

24.1 Potenzreihenentwicklung

Alle Reihen um $-1 < x < 1$ oder $-|a| < x < |a|$
Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 +$
$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$
$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots\right)$
Integrale/Ableitungen der geom. Reihe:
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$
$\frac{1}{(x-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2} (n+1) x^n = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \frac{4x^3}{a^5} ..$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$
$\ln(1+x) = \int_1^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp$
$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n ((1+n)(2+n)) = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots$
$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n (-1)^n (1+n)(2+n) = 1 - 3x + 6x^2 \mp$
Binomische Reihe:
$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm \ldots$
$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm$
$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - ..$
Weitere Reihen ($x \in \mathbb{R}$) :
$e^{cx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n!} = 1 + (cx) + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \ldots$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$
$\sin^2(x) = \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 \mp$
$\cos^2(x) = 1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 \pm$

$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \overset{6!}{=} x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$
$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \pm \ldots$
Vereinfachungen
$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{x-1}{3}\right) 1 \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \ldots\right)$
$\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx} \frac{-1}{x-3} = \frac{d}{dx} \frac{1}{3-x}$
$\ln(x) = \ln(x+1-1) = \ln(1+(x-1))$
$e^x = e \cdot e^{x-1}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2n} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^{2n} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$
$\left(a^5 - b^5\right) = (a-b)\left(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4\right)$
$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a+1)\left(a^4 + a^2 + 1\right) = (a+1)\left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 - a + 1\right)$

25 Komplexe Zahlen (Fota S.18-19)

Potenzieren (Nur in Trig./Exp.-Form sinnvoll)
$z^n = r \cdot \mathrm{cis}(\varphi)^n = r^n \cdot \mathrm{cis}(n \cdot \varphi)$
Wurzel ziehen
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$
$k = \{0, 1, \ldots, n-1\} \rightarrow$ bilden ein regelmässiges n-Eck
Natürlicher Logarithmus
$\ln(z)$ ist unendlich vieldeutig
Hauptwert: $\ln(z) = \ln(r) + i\varphi$
Allgemein: $\ln(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi) k \in \mathbb{Z}$

26 Graphen Transformation

$1. f(x) = x^3$

$2. f(x) = -x^3$
(Spiegelung an x-Achse)

$3. f(x) = 1 + x^3$
(Verschiebung x-Achse)

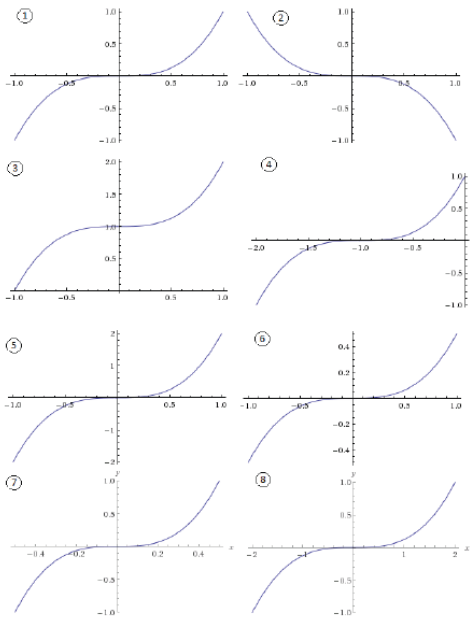
$4. f(x) = (1+x)^3$
(Verschiebung y-Achse)

$5. f(x) = 2x^3$
(Dehnung y-Achse)

$6. f(x) = 0.5(x^3)$
(Stauchung y-Achse)

$7. f(x) = (2x)^3$
(Stauchung x-Achse)

$8. f(x) = (0.5x)^3$
(Dehnung x-Achse)



27 Drehmatrizen (Fota S.112)

Drehrichtung nach rechte-Hand Regel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Drehung um x-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Drehung um y-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Drehung um z-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \sin(\rho) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \cdot \sin(\rho) \\ \sin(\varphi) \cdot \sin(\rho) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \cdot \sin(\rho) \\ -\sin(\rho) & 0 & \cos(\rho) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ beliebige Achse durch $(0,0,0)$

$\rightarrow$ beliebige Achse durch $(0,0,0)$

28 Fehlerrechnung (Fota S.64)

Voraussetzung: h ist sehr klein

$$f(x_0 + h) \approx f'(x_0) \cdot h + f(x_0) + \text{ Rest}$$

$$\rightarrow \text{ Weil: } f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

29 Linearisieren

Tangente an $f(x)$ im Punkt (x_0, y_0) (lin. Ersatzfkt.):

$$y(x) = t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) :

$$t(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x((x_0, y_0)(x - x_0)) + f_y((x_0, y_0)(y - y_0)) = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} + r \cdot \mathrm{grad} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$\vec{n}_E = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)^T$
Fehlerfunktion: $\phi(x) = f(x) - \left[f'(x_o) \cdot (x - x_0) + f(x_0)\right]$

29.1 Approximationen für kleine Werte von $(x) << 1$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$; $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

30 Additionstheoreme (Fota S.99)

Allgemeines

$\cos(-x) = \cos(x);\quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(x)$

$\cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right);\quad \tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$

$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

Cot

$1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin(x)};\quad \cot(a \pm b) = \frac{\cot(a)\cot(b) \mp 1}{\cot(a) \pm \cot(b)}$

$\cot(2a) = \frac{\cot^2(a) - 1}{2\cot(a)}$

$\frac{a}{2}$

$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(a))}; \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(a))}$

Potenzen

$\sin^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2a))$
$\sin^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (3\sin(a) - \sin(3a))$
$\sin^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$

$\cos^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2a))$
$\cos^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (3\cos(a) - \cos(3a))$
$\cos^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$

30.1 Hyperbolische Funktionen (Fota S.60)

Allgemeines

$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

$\tanh(a \pm b) = \frac{1}{\coth(a \pm b)} = \frac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a)\tanh(b)}$

2a und 3a

Alles gleich wie für $\sin$ und $\cos$ (Fota S.99),
$\rightarrow \sin \mathrel{\hat{=}} \sinh, \cos \mathrel{\hat{=}} \cosh, \tan \mathrel{\hat{=}} \tanh$

$\frac{a}{2}$

$\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a) - 1}{2}},\quad x \geq 0;\quad \cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a) + 1}{2}}$

$\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\cosh(a) - 1}{2}},\quad x \leq 0$

Summen

$\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sinh(a) - \sinh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\tanh(a) \pm \tanh(b) = \frac{\sinh(a \pm b)}{\cosh(a)\cosh(b)}$

Produkte

$\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2} \cdot [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]$
$\cosh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2} \cdot [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]$
$\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2} \cdot [\sinh(a+b) + \sinh(a-b)]$
$\tanh(a)\tanh(b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{\coth(a) + \coth(b)}$

$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)]$
$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)]$
$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)]$

Potenzen

$\sinh^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh(2a) - 1)$

$\sinh^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (\sinh(3a) - 3\sinh(a))$

$\sinh^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (\cosh(4a) - 4\cosh(2a) + 3)$

$\cosh^2(a) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh(2a) + 1)$

$\cosh^3(a) = \frac{1}{4} \cdot (\cosh(3a) + 3\cosh(a))$

$\cosh^4(a) = \frac{1}{8} \cdot (\cosh(4a) + 4\cosh(2a) + 3)$

Formel von Moivre

$(\cosh(a) \pm \sinh(a))^n = \cosh(na) \pm \sinh(na),\quad n \geq 2$

31 Inverse der Trigonometrischen Funktionen

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}\quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\tan(\arccos(x)) = x^{-1} \cdot (1 - x)^{\frac{1}{4}}$

$\tan(\arcsin(x)) = x \cdot (1 - x)^{-\frac{1}{4}}$

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right.$

$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad |x| < 1$

$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right),\quad |x| > 1$

$\sinh(2 \cdot \operatorname{arcsinh}(x)) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$

$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1};\quad x > 0$

$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

Exam Question: Compute the Integral of f(x)

Let $f(x)$ be a function with Fourier transform equal to:

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1 + \omega^2}.,\quad \text{Compute the integral: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ?$$

Solution: The Fourier transform is defined by

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

therefore in particular: at $\omega = 0$: $\quad \widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \underbrace{e^{-0ix}}_{1} dx$

or equivalently we can compute the integral of:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(0) = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1 + \omega^2}\bigg|_{\omega=0} = 2$$

Exam Question: Fourier Series & find similar numerical series

Consider the function $f(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.
a) Show that it is periodic of period 2π. For each $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + 2\pi) = \left|\sin\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = f(x)$$

b) Compute its Fourier series.
$f(x)$ is even $\Rightarrow b_n = 0$. For $x \in [0, \pi]$ we have $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$a_0 \overset{\text{(even)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n \overset{\text{(even)}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\left(2n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\right)}{4n^2 - 1}\Bigg|_0^\pi = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Fourier series: $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \cos(nx)$

c) Use the result to find the numerical series: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} = ?$

$f(x)$ is continuous everywhere $\Rightarrow$ it coincides with its Fourier series:

$$\forall x \in \mathbb{R}:\quad \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \cos(nx)$$

To calculate the above sum we want to get rid of $\cos(nx)$, which is easily done in the point $x = 0$, in which $\cos(nx) = 1$:

$$@\ x = 0:\quad 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1}$$

Which means that: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$