Mechanik 2: Übungsstunde 2

Rijo Peedikayil

06.03.2024

Theorie: Woche 2

1 Spannungen in 2D

1.1 Allgemein

Die Spannung ist definiert als die Verteilung einer Kraft F auf der Fläche A, auf der diese Kraft wirkt.

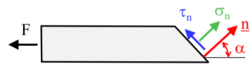
$$\sigma = \frac{dF}{dA}$$

Falls die Kraft auf der Fläche konstant verteilt ist, also ortsunabhängig ist, vereinfacht sich die Gleichung der Spannun

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Spannung können immer in zwei Kategorien unterteilt werden: Normalspannungen σ und Schubspannungen τ. Normalspannungen wirken senkrecht zur betrachteten Fläche. Laut der Kovention werden positive Normalspannungen als Zugspannungen und negative Normalspannungen als Druckspannungen definiert.

Die Spannungszusammensetzung hängt von der Bezugsfläche ab, die gewählt wird. Dies ist wichtig zu beachten, da die grössten Spannungen in der Regel in einer bestimmten Richtung auftreten. Dieses Wissen wird dann beispielsweise für die Festigkeitsanalyse von Bauteilen benötigt.

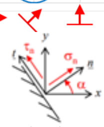


$$\sigma = \frac{F}{A_0}(\cos\alpha)^2 \qquad \int_A \sigma_n \, dA = F_n$$

$$\tau = -\frac{F}{A_0}\sin\alpha\cos\alpha \qquad \int_A \tau_{nt} \, dA = F_{nt}$$

1.2 Spannungsvektor

Alternativ zur expliziten Angabe von $\vec{\sigma}_n$ und $\vec{\tau}_n$ werden die auf einer Fläche wirkenden Spannungen durch den Spannungsvektor $\vec{s}$ repräsentiert. Der Spannungsvektor variiert je nach Ort x auf dem Querschnitt. Da man meist nur eine bestimmte (kritische) Stelle anschaut schreibt man diese Abhängigkeit meist nicht explizit hin. Der Normalspannungsvektor $\vec{\sigma}_n$ ist, wie der Name schon sagt, die senkrechte Komponente des Spannungsvektors. Man berechnet ihn, indem man den Spannungsvektor $\vec{s}$ auf den Normalvektor $\vec{n}$ abbildet. Je nachdem, ob es sich um eine Zug- oder Druckspannung handelt, muss man den positiven (bei Zug) oder negativen (bei Druck) Normalvektor $\vec{n}$ nehmen. Der Schubspannungsvektor $\vec{\tau}_n$ ist die Komponente des Spannungsvektors $\vec{s}$, die parallel zur Fläche ist. Es gilt, dass der Spannungsvektor $\vec{s}$ die Summe vom Normal- und Schubspannungsvektor ist.



$$\vec{s}(\vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \cdot \vec{t} = \vec{\sigma_n} + \vec{\tau_n}$$

$$\sigma_n = \vec{s} \cdot \vec{n} \qquad \vec{\sigma_n} = \sigma_n \vec{n}$$

$$\tau_n = \vec{s} \cdot \vec{t} = |\vec{s} - \vec{\sigma_n}| \qquad \vec{\tau_n} = \tau_n \vec{t}$$

1.3 Spannungstensor

Der Spannungstensor ist ein mathematisches Objekt, das den Spannungszustand an einem Punkt in einem Material beschreibt. Er ist in 2D ein Tensor zweiter Ordnung mit vier Einträgen, die die Normalspannungen in x- und y-Richtung, also σ_x und σ_y, die Schubspannung in xy-Richtung, also τ_{xy} und τ_{yx} (,die aufgrund der Symmetrie des Tensors gleich sind), enthalten.

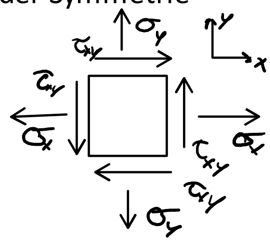
Wichtig zu beachten ist, dass sich Tensoren nicht unter Koordinatentransformation verändern. Lediglich ihre mathematische Darstellung ändert sich. Mit anderen Worten: Der Spannungszustand selbst bleibt gleich, wenn man das Koordinatensystem dreht, aber die Einträge in der Matrix des Spannungstensors ändern sich.

$$[\underline{T}]_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{s}(\vec{n}) = [T] \cdot \vec{n}$$

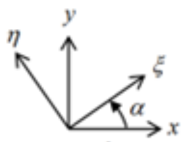
$$\sigma_n = ([T] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\tau_n = ([T] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}$$

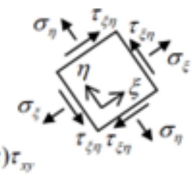


1.4 Koordinatentransformation

Wenn man das gegebene Koordinatensystem um den Winkel θ dreht, ändern sich die Schub- und Normalspannungen bezüglich des gedrehten Koordinatensystems. Um die neuen Spannungen zu berechnen, kann man folgende Gleichungen verwenden.



$$[T]_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta \end{bmatrix}$$



$$\sigma_\xi = (\cos\alpha)^2\sigma_x + (\sin\alpha)^2\sigma_y + 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\tau_{xy}$$

$$\sigma_\eta = (\sin\alpha)^2\sigma_x + (\cos\alpha)^2\sigma_y - 2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\tau_{xy}$$

$$\tau_{\xi\eta} = (\sigma_y - \sigma_x)(\sin\alpha)(\cos\alpha) + \tau_{xy}\left[(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2\right]$$

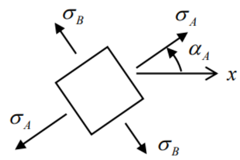
1.5 Hauptspannungen

Wie wir gesehen haben, ändern sich die Spannungen mit der Änderung der Koordinaten. Oft ist man an den Extremwerten der Spannungen und deren Richtung interessiert Die sogenannten Hauptspannungen σ_1 und σ_2 beschreiben die maximale und minimale Normalspannungen, die beim betrachteten Materialpunkt vorkommen. Die Hauptachsen e_1 und e_2 sind die jeweiligen Richtungen der Hauptspannungen. Eine weitere Eigenschaft eines Hauptspannungszustandes ist, dass die Schubspannungen verschwinden (z.B. hydrostatischer Druck).
Falls der Spannungszustand gegeben ist, kann man die Hauptspannungen und -achsen folgendermassen berechnen:

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad 0 \le \alpha_A < 90^\circ \qquad \Rightarrow \sigma_A = (\cos\alpha_A)^2\sigma_x + (\sin\alpha_A)^2\sigma_y + 2(\sin\alpha_A)(\cos\alpha_A)\tau_{xy}$$

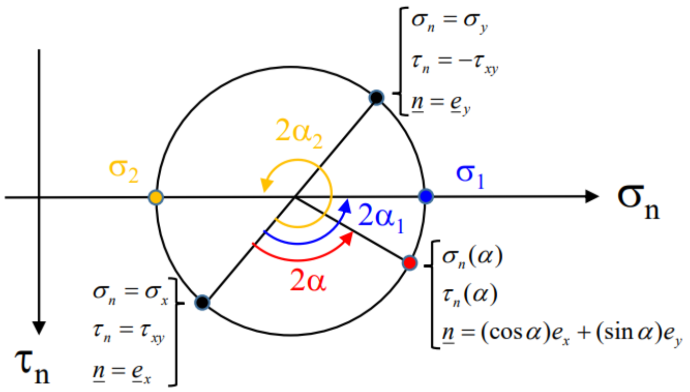
$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \alpha_B = \alpha_A + 90^\circ \qquad \Rightarrow \sigma_B = (\cos\alpha_B)^2\sigma_x + (\sin\alpha_B)^2\sigma_y + 2(\sin\alpha_B)(\cos\alpha_B)\tau_{xy}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \alpha_{\tau\max} = \alpha_A \pm 45^\circ \qquad \tan(2\alpha_A) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



1.6 Mohr'scher Kreis

Der Mohr'sche Kreis ist eine grafische Darstellung des Spannungszustands an einem Materialpunkt.
Der Mohr'sche Kreis ermöglicht die Bestimmung der Hauptspannungen und Hauptrichtungen und kann aus dem Spannungstensor abgeleitet werden.



Vorgehen:

1. Tragen Sie die Punkte (σ_x, τ_{xy}) und (σ_y, $-\tau_{xy}$) in das Koordinatensystem ein, falls der betrachtete Spannungszustand liegt. In der yz-Ebene nimmt man die Punkte (σ_y, τ_{yz}) und (σ_z, $-\tau_{yz}$) und in der xz-Ebene trägt man die Punkte (σ_x, τ_{xz}) und (σ_z, $-\tau_{xz}$) ein.
2. Zeichnen Sie einen Kreis durch diese beiden Punkte.
3. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sind die Schnittpunkte mit der σ_n-Achse und die Hauptrichtung kann man vom ersten Referenzpunkt aus messen. Hierbei muss beachtet werden, dass die Winkel im Mohr'schen Kreis 2α und man muss daher die gemessenen Winkel halbieren.

Wenn man nun die Hauptspannungsformel anschaut, sieht man den Zusammenhang mit dem Mohrschen Kreis. Man berechnet also eigentlich nur den Mittelpunkt des Mohr'schen Kreises und addiert/subtrahiert den Radius und erhält somit die Hauptspannungen.

$$\sigma_1 = \overbrace{\tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)}^{\text{Mittelpunkt}} + \overbrace{\sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}}^{\text{Radius}}$$

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

1.7 Hydrostatischer Druck

Der hydrostatische Druck ist ein spezieller Belastungszustand, bei dem jede Bezugsfläche einen Spannungsvektor besitzt, der senkrecht zu ihr ist und eine Druckspannung darstellt. In diesem Zustand existieren keine Schubspannungen.

Eigenschaften:

-Normalspannungen in allen Richtungen gleich: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
-Schubspannungen gleich Null: $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
-Druckspannung: $\sigma_n = -p$, wobei p der Druck ist

2 Stabkräfte

2.1 Allgemein

Ab und zu kommt es vor, dass in einem Fachwerk Stabkräfte berechnet werden müssen, um zum Beispiel die minimale Fläche der Stäbe herauszufinden. Dafür gibt es drei verschiedene Arten: Dreikräfteschnitt, Knotengleichgewicht oder PdvL.Die Wahl der Methode hängt von verschiedenen Faktoren ab, z. B. von der Größe und Komplexität des Fachwerkes, der Anzahl der gesuchten Kräfte und der eigenen Erfahrung.
Hinweis: Es kommt vor, dass Fachwerke Symmetrien aufweisen! In diesen Fällen kann man dann bestimmte Stabkräfte gleichstellen. Es lohnt sich daher immer, zuerst die Geometrie des Fachwerkes zu analysieren, bevor man anfängt zu rechnen, um Zeit zu sparen.

2.2 Dreikräfteschnitt

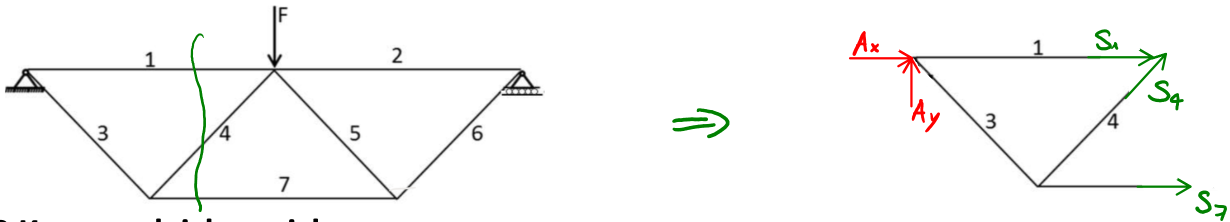
Die Idee des Dreikräfteschnitts ist, das Fachwerk in drei Stäben zu trennen, um dann die Gleichgewichtsbedingungen (GGB) aufzustellen und drei Stabkräfte auf einmal zu berechnen.

2.2.1 Vorgehen

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Drei Stäbe bestimmen, die man berechnen möchte

Achtung: Nachdem man die Stäbe getrennt hat, muss es möglich sein, das Fachwerk in zwei Systeme zu trennen! Falls das nicht der Fall ist, muss man entweder andere Stäbe oder einen anderen Vorgang wählen.

3. System trennen und Stabkräfte in Stabrichtung einführen
4. GGB aufstellen und Stabkräfte berechnen

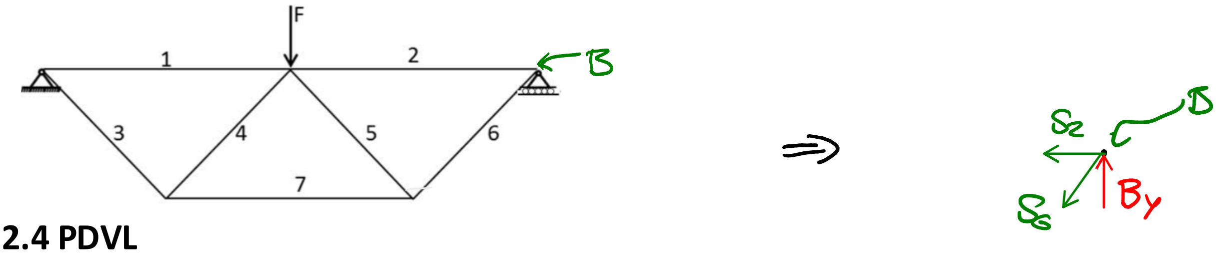


2.3 Knotengleichgewicht

Das Knotengleichgewicht besagt, dass die Summe aller Kräfte an einem Knoten gleich Null sein muss.

2.3.1 Vorgehen

1. Lagerkräfte bestimmen
2 Knoten wählen, an dem zwei unbekannte Stabkräfte wirken
3. GGB in x- und y-Richtung aufstellen
4. Unbekannte Stabkräfte berechnen

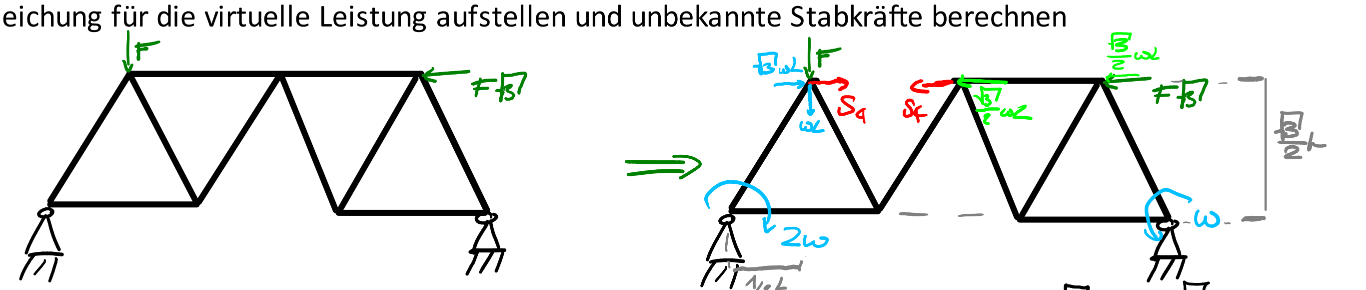


2.4 PDVL

Das PdvL ist ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von unbekannten Kräften in statischen Systemen.

2.2.1 Vorgehen

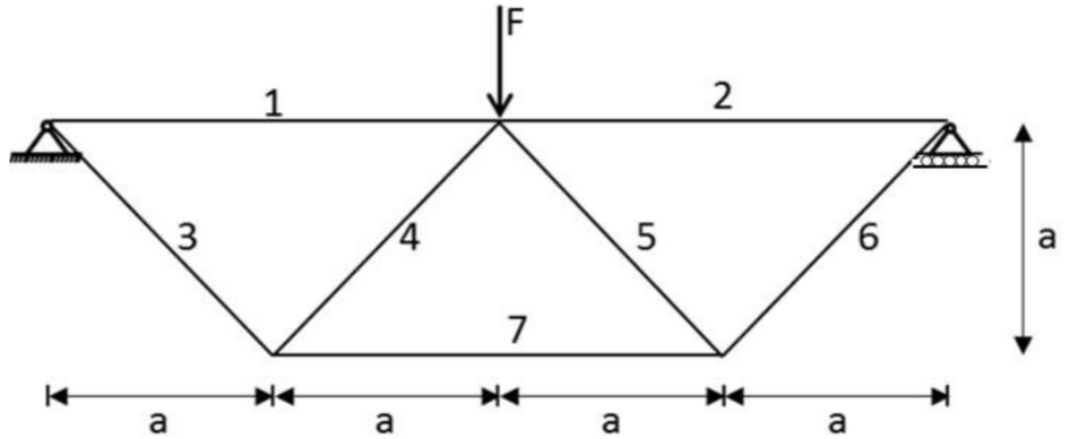
1. Lagerkräfte bestimmen
2. Virtuelle Verschiebung eines Teils des Fachwerkes definieren
3. Virtuelle Leistung aller Kräfte berechnen
4. Gleichung für die virtuelle Leistung aufstellen und unbekannte Stabkräfte berechnen



$\hookrightarrow F\omega L + S_4\sqrt{3}\omega L + S_4\frac{\sqrt{3}}{2}\omega L + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega L \cdot F\sqrt{3} = 0$

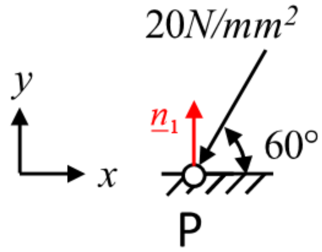
Aufgabe S1:

Das dargestellte Fachwerk, das aus Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft F=64kN belastet. Bestimmen Sie die Querschnittsflächen der Stäbe so, dass die auftretenden Spannungen gerade den Wert σ_{zul}=160MPa annehmen. Es wird vorausgesetzt, dass kein Knicken eintritt.



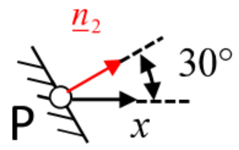
Aufgabe S2:

An einem Materialpunkt P sei der Spannungsvektor für eine hypothetische Schnittfläche mit dem Normalenvektor $\underline{n}_1 = \underline{e}_y$ gegeben (siehe Abbildung). Des Weiteren gelte $\left(\underline{\underline{T}}\,\underline{e}_x\right) \cdot \underline{e}_x = 10MPa$.



a) Man bestimme die Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{T}}$ im x-y-Koordinatensystem

b) Man bestimme die Normalspannung und den Betrag der Schubspannung für ein Flächenelement, dessen Flächennormale $\underline{n}_2$ um einen Winkel von 30° bezüglich der x-Achse geneigt ist.

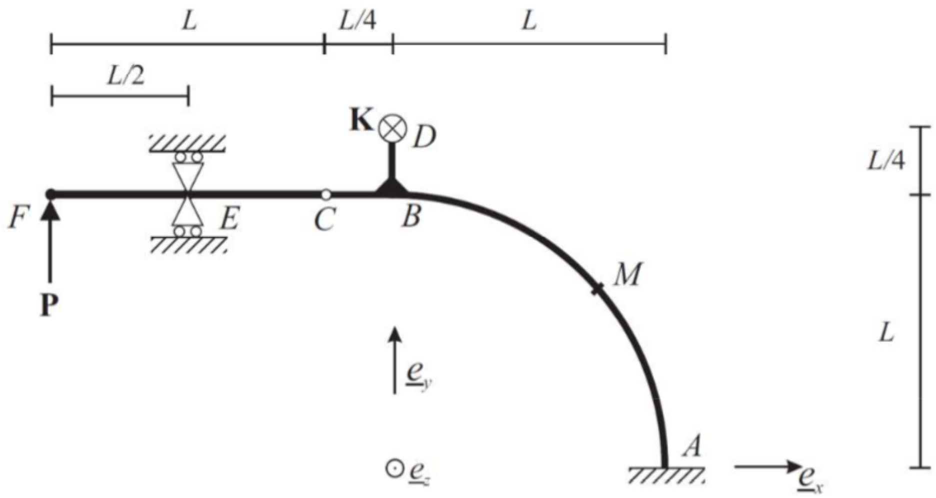


c) Man bestimme die maximale Schubspannung am Materialpunkt P und die Orientierung der zugehörigen hypothetischen Schnittfläche(n) bezüglich der x-Achse.

Wiederholungsaufgabe:

Die abgebildete Struktur besteht aus den Balken A-B, B-C, B-D und C-F. Die Balken B-C und C-F sind im Punkt C gelenkig miteinander verbunden. Der Balken C-F ist im Punkt E durch ein kurzes Querlager reibungsfrei gelagert. Am Punkt F greift eine Vertikalkraft mit dem Betrag P an. Der viertelkreisförmige Balken A-B ist in A eingespannt und in B mit den Balken B-C und B-D verschweisst. Im Punkt D wirkt die Kraft $\underline{K} = -K\underline{e}_z$.

a) Man bestimme die Lagerkräfte und -momente in den Punkten A und E.
b) Man bestimme die Beanspruchungen für den Balkens C-F.
c) Man bestimme die Beanspruchungen an der Stelle M, welcher in der Mitte des Balkens A-B liegt.



Bei Beanspruchungen von Kreisbogen kann man diese Abbildung als Hilfestellung verwenden

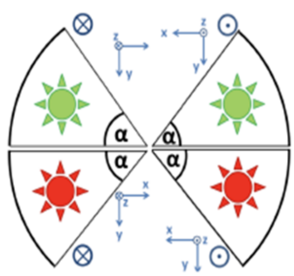
Achtung nur einfach so anwendbar, falls das Koordinatensystem übereinstimmt.

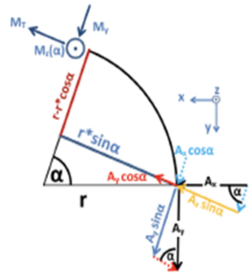
Bei dieser Aufgabe also lieber einfach normal vorgehen.

(Freischneiden, Lagerkraft, Beanspruchung)

↳ Tipps: - übersichtliche Skizze für c)

- Längen/Hebelarme für 45° berechnen

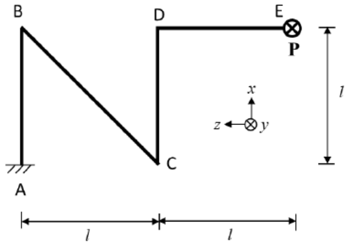




$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_T \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ominus A_x & A_y \\ 0 & \ominus A_z \\ -A_z & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} r * sin(\alpha) \\ r * [1 - cos(\alpha)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{A,z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_x & \ominus A_y & 0 \\ -A_y & \ominus A_x & 0 \\ 0 & 0 & -A_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teil D –Statisch bestimmtes Tragwerk mit kombinierter Beanspruchung (Biegung & Torsion)



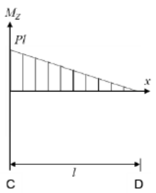
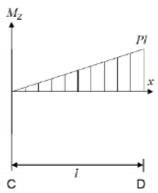
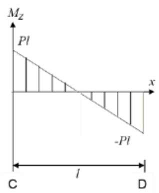
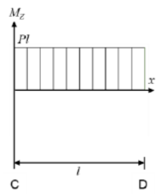
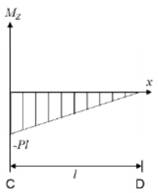
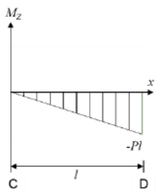
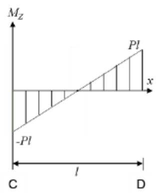
Der durchgehende, zweifach abgewinkelte, in der x-z-Ebene liegende Träger A-B-C-D (mit Biegesteifigkeit EI und Torsionssteifigkeit GI_T in allen geraden Abschnitten) wird an der Stelle E durch eine in positive globale y-Richtung wirkende Kraft P belastet. Der Träger ist an der Stelle A eingespannt.

- Frage D1 (1.5 Punkte):
  Man bestimme das Torsionsmoment T_{B-C} für den Balkenabschnitt B-C.

D1. 8 mögliche Antworten	Ⓐ $T_{B-C} = -Pl$	Ⓑ $T_{B-C} = -2Pl$	Ⓒ $T_{B-C} = -\frac{3}{2}Pl$	Ⓓ $T_{B-C} = -\sqrt{2}Pl$
	Ⓔ $T_{B-C} = 2Pl$	Ⓕ $T_{B-C} = -\frac{1}{\sqrt{2}}Pl$	Ⓖ $T_{B-C} = -2\sqrt{2}Pl$	Ⓗ $T_{B-C} = 0$

Frage D2 (1 Punkt):

Man bestimme den Verlauf der Biegemomentenbeanspruchung $M_z(x)$ für Biegung um die eingezeichnete globale z-Achse im Bereich C-D. Die lokale x-Achse zeige in die gleiche Richtung wie die dargestellte globale x-Achse.

D2. 8 mögliche Antworten	Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓓ 
	Ⓔ 	Ⓕ 	Ⓖ 	Ⓗ