# Mechanik 2: Übungsstunde 7

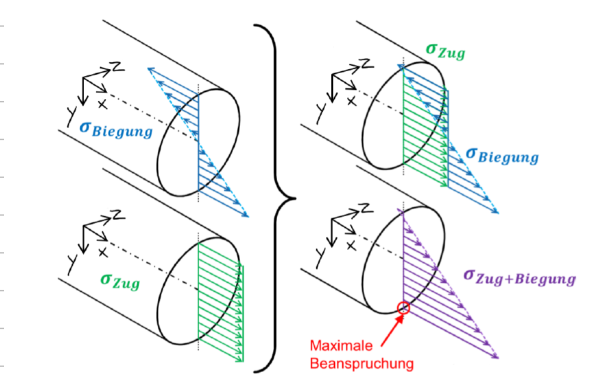
**Rijo Peedikayil**
**17.04.2024**

## Theorie: Woche 7

# 1 Biegespannung

## 1.1 Definition und Eigenschaften

Biegespannung ist eine Normalspannung, die in einem Körper durch ein Biegemoment erzeugt wird. Sie ist nicht homogen auf der Querschnittsfläche verteilt, sondern nimmt linear mit dem Abstand zum Schwerpunkt zu oder ab. Beim Beispiel liegt Druck oberhalb der Momentenachse, unterhalb Zug (siehe Rechte-Hand-Regel). Biegespannungen können mit axialen Normalspannungen mithilfe des Superpositionsprinzips addiert werden.




$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

## 1.1 Bezugsachsen und Widerstandsmoment

Die Bezugsachsen müssen ihren Ursprung im Schwerpunkt der Querschnittsfläche haben. Der Widerstandsmoment $W_z$ fasst die geometrischen Eigenschaften des Querschnitts für die maximale Spannung in einem Term zusammen:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \qquad W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \quad (\textit{Wiederstandsmoment})$$

$$\sigma_x(x,z) = \frac{+M_y(x)}{I_y} \cdot z \qquad \max|\sigma_x| = \frac{|M_y(x)| \cdot z_{max}}{I_y} = \frac{|M_{y(x)}|}{W_y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{-M_z(x)}{I_z} \cdot y \qquad \max|\sigma_x| = \frac{|M_z(x)| \cdot y_{max}}{I_z} = \frac{|M_{z(x)}|}{W_z}$$

# 2 Trägheitstensor

## 2.1 Deviationsmoment $C_{yz}$

Das Deviationsmoment, auch als gemischter Flächenträgheitsmoment bezeichnet, ist eine physikalische Grösse, die mit der Stabilität der Rotation eines Körpers zusammenhängt. Es beschreibt, wie stark ein Körper dazu neigt, seine Rotationsachse zu verändern, wenn er nicht um eine seiner Hauptachsen rotiert. Stabile Rotation: Wenn das Deviationsmoment klein ist, rotiert der Körper stabil um seine Achse, ohne zu "eiern". Instabile Rotation: Ist das Deviationsmoment gross, ist die Rotation instabil und der Körper beginnt zu taumeln, d.h. er ändert ständig seine Rotationsachse.

$$I_z = \int y^2\, dA, \quad I_y = \int z^2\, dA, \quad C_{yz} = -\int yz\, dA$$

**Satz von Steiner**

$$I_y^* = \sum_i^n \left[ I_{y_i} + {y^*_{s_i}}^2 \cdot A_i \right] \qquad \underline{I} = \begin{bmatrix} I_x & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & I_y & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

$$I_z^* = \sum_i^n \left[ I_{z_i} + {z^*_{s_i}}^2 \cdot A_i \right]$$

$* \rightarrow$ *Bezug zum Schwerpunkt*

$$C_{yz} = C_{yz}^* - dzdyA$$

$$C_{yz} = 0$$

$\rightarrow$ *wenn Symmetrieachse vorhanden*

$\rightarrow$ *oder $\underline{e}_y \& \underline{e}_z$ sind Hauptachsen*

**Koordinatentransformation**

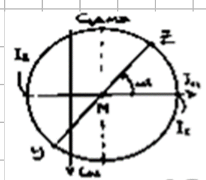
$$I_\eta = (\cos\alpha)^2 I_y + (\sin\alpha)^2 I_z + 2(\sin\alpha)(\cos\alpha) C_{yz}$$

$$I_\zeta = (\sin\alpha)^2 I_y + (\cos\alpha)^2 I_z - 2(\sin\alpha)(\cos\alpha) C_{yz}$$

$$C_{\eta\zeta} = (I_z - I_y)(\sin\alpha)(\cos\alpha) + C_{yz}\left[(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2\right]$$

## 2.2 Trägheitstensor

Der Trägheitstensor I fasst alle Trägheitseigenschaften eines Körpers an einem Punkt zusammen. Er besteht aus den axialen Flächenträgheitsmomenten und den gemischten Flächenträgheitsmomenten. Der Tensor ist jeweils an einem bestimmten Punkt definiert, dem Schnittpunkt der Drehachsen. Verschiebt man die Drehachsen, ändert sich der Tensor I. Dreht man die Drehachsen, transformiert man den Tensor I. Dies entspricht einer Koordinatentransformation, die die Werte von I verändert. Analog zum Spannungs- und Dehnungstensor kann mann den Mohr'schen Kreis verwenden, um die Hauptwerte und -richtungen des Trägheitstensors zu bestimmen. In jedem Punkt existiert eine Richtung, in der die Deviationsmoment gleich Null sind. Dieser Zustand wird als Hauptzustand bezeichnet. Für den Hauptzustand können die bekannten Formeln zur Bestimmung der Hauptwerte und -richtungen verwendet werden.




Hauptwerte von $\underline{I}$ 2D

$$I_{I,II} = \underbrace{\frac{I_y + I_z}{2}}_{\text{Mittelpunkt}} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + C_{yz}^2}}_{\text{Radius (Pythagoras)}}$$

$$\tan(2\alpha_A) = \frac{2C_{yz}}{I_y - I_z} \qquad 0 \le \alpha_A < 90^\circ \qquad \alpha_B = \alpha_A + 90^\circ$$

# 3 Statisch unbestimmte Systeme mittels der Biegelinie bestimmen

## 3.1 Statisch unbestimmte Systeme

In der Technischen Mechanik kommt es häufig vor, dass man auf statisch unbestimmte Systeme stösst. Diese Systeme besitzen mehr Unbekannte (z.B. Lagerkräfte) als Gleichungen, die aus den Gleichgewichtsbedingungen (GGB) aufgestellt werden können. Um diese Systeme zu lösen, bedarf es zusätzlicher Informationen. Der Grad der Unbestimmheit kann man mit folgenden Formeln bestimmen:

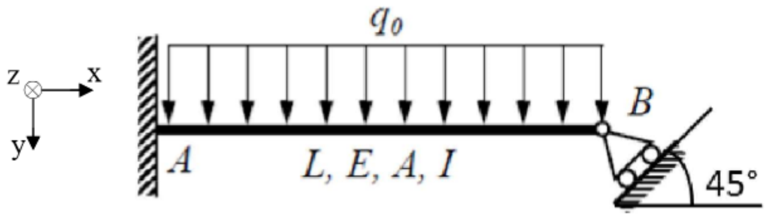
$$n_{2D} = \#\text{Lagerkräfte} - 3 \cdot (\#\text{Körper}) + \#\text{Zwischenkräfte}$$
$$n_{3D} = \#\text{Lagerkräfte} - 6 \cdot (\#\text{Körper}) + \#\text{Zwischenkräfte}$$

## 3.2 Vorgehen: Statisch unbestimmte Systeme mittels Biegelinie bestimmen

1. Grad der Unbestimmtheit $n = (\#\text{L.K.}) - [3 / 6] \cdot (\#\text{K.}) + (\#\text{Zw.K.})$ berechnen.
2. System freischneiden und Lagerkräfte berechnen.
3. Laufvariable einführen und Momentverlauf (mithilfe von Differentialbeziehungen / Freischneiden) berechnen.
4. Flächenträgheitsmoment berechnen.
5. Biegelinie/Verschiebungsfunktion mit $\iint \frac{M_{z/y}(x)}{EI_{z/y}(x)} dx$ bestimmen.
6. Randbedingungen einsetzen und Integrationskonstanten bestimmen.
7. Verbleibende Lagerkräfte bestimmen mit n Rand- oder Stetigkeitsbedingungen finden $v(x) = f(x, A_x, B_y, \dots) + xC_1 + C_2$

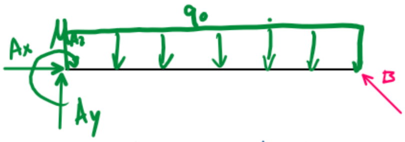
# Aufgabe S1:

Ein Biegebalken (Länge $L$, E-Modul $E$, Querschnittsfläche $A$, Flächenträgheitsmoment $I$) ist im Punkt $A$ eingespannt und in $B$ gemäss der Zeichnung schräg gelagert. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht als verteilte Last $q_0$.




Man berechne den Betrag der Verschiebung des Punktes $B$.

## ① Lagerkräfte bestimmen




GGB lösen und alle Lagerreaktion in Abhängigkeit einer noch Unbekannten Lagerkraft beschreiben.

Grad der Unbestimmtheit = # Unbekannte − # Gleichungen = 4 − 3 = 1

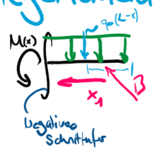
→ Braucht man den Schritt bei dieser Aufgabe überhaupt?
↳ Nein

$$\Sigma F_x: \; A_x(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} B$$

$$\Sigma F_y: \; A_y(B) = q_0 L - \frac{\sqrt{2}}{2} B$$

$$\Sigma M_z: \; M_{Az}(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} Bl - \frac{q_0 l^2}{2}$$

## ② Biegemoment bestimmen




$$M_b(x, B) = \frac{q_0}{2}(L-x)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} B (L-x)$$

## ③ Biegelinie berechnen

$$v(x) = \frac{1}{EI} \iint M_b \, dx = \frac{1}{EI} \iint \frac{q_0}{2}(L-x)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} B (L-x) \, dx$$

$$= \frac{q_0}{24}(L-x)^4 - \frac{\sqrt{2}}{12} B (L-x)^3 + C_1 x + C_2$$

## ④ Randbedingungen

- Einspannung bei $x=0 \Rightarrow v(0) = v'(0) = 0$

$$v(0) = 0 = \frac{q_0}{24} L^4 - \frac{2\sqrt{2}}{24} BL^3 + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{24} L^3 \left(-q_0 L + 2\sqrt{2} B\right)$$

$$v'(0) = -\frac{q_0}{6} L^3 + \frac{\sqrt{2}}{4} BL^2 + C_1$$

$$C_1 = \frac{1}{24} L^2 \left(-6\sqrt{2} B + 4 q_0 L\right)$$

$$v(x) = \frac{1}{24EI}\left(q_0 (L-x)^4 - 2\sqrt{2} B (L-x)^3 + L^2 (4q_0 L - 6\sqrt{2} B) x + L^3 (2\sqrt{2} B - q_0 L)\right)$$

- Auflager bei $x=L$ im 45° Winkel (Achtung Koordinatensystem!) $\Rightarrow v(L) = -u(L)$

$$u(x) = \frac{1}{EA} \int N(x) \, dx = \frac{1}{EA} \int \frac{\sqrt{2}}{2} B \, dx = \frac{-1}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} Bx$$

$$\frac{1}{\cancel{E}A} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} BL = \frac{1}{\cancel{24} \cancel{E} I} \left(4 q_0 L^4 - 6\sqrt{2} BL^3 + 2\sqrt{2} BL^3 - q_0 L^4\right)$$

$$\frac{1}{A} \sqrt{2} B = \frac{1}{12I}\left(3 q_0 L^3 - 4\sqrt{2} BL^2\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3I} BL^2 + \frac{1}{A} \sqrt{2} B = \frac{q_0 L^3}{4I}$$

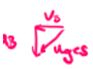
$$\sqrt{2} B \left(\frac{L^2}{3I} + \frac{1}{A}\right) = \frac{q_0 L^3}{4I}$$

$$B = \frac{\sqrt{2}\, q_0 L^3}{8I \left(\frac{L^2 A + 3I}{3I \; A}\right)} = \frac{\sqrt{2}\, q_0 L^3 \, 3 \cancel{I} A}{8 \cancel{I} (L^2 A + 3I)} = \underline{\frac{3\sqrt{2}\, q_0 L^3 A}{8(AL^2 + 3I)}}$$

$$u_B = -\frac{1}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} L \, \frac{3\sqrt{2}\, q_0 L^3 A}{8(AL^2 + 3I)} = \underline{\underline{-\frac{3 q_0 L^4}{8E(AL^2 + 3I)}}}$$

$$v_B = -u_B = \underline{\underline{\frac{3 q_0 L^4}{8E(AL^2 + 3I)}}}$$

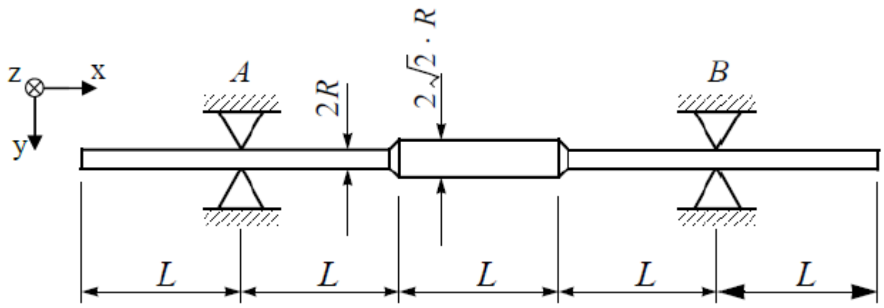
## ⑤ Superposition




$$|u_{ges}| = \sqrt{v_B^2 + u_B^2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}\, q_0 L^4}{8E(AL^2 + 3I)}}}$$

## Aufgabe S2:

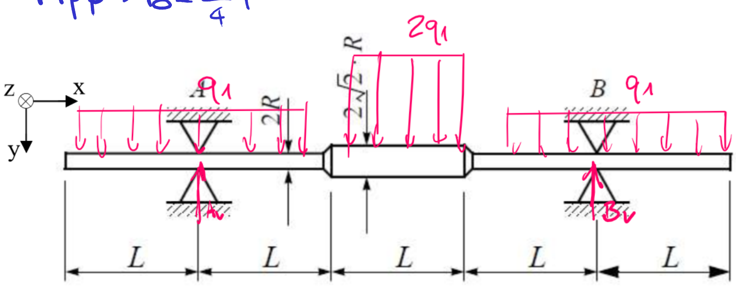
Die abgebildete kreiszylindrische Welle ($R \ll L$) ist in $A$ und $B$ unverschieblich in y-Richtung gelagert und nur durch das Eigengewicht belastet. Man bestimme den kleinstmöglichen zulässigen Radius $R$, wenn die Länge $L$, das konstante spezifische Gewicht $f_G$ und die zulässige Spannung $\sigma_{zul}$ gegeben sind.




Geg: $L = 1m,\ \sigma_{zul} = 20\frac{kN}{cm^2}, f_G = 80\frac{N}{dm^3}$

① Lagerkräfte, Linienverteilte Kräfte, Flächenträgheitsmoment bestimmen (Tipp: Symmetrie)

Tipp: $I = \frac{\pi}{4} r^4$




$q_1 = f_G \cdot A = f_G \cdot \pi R^2$

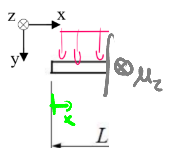
$q_2 = f_G \cdot A = f_G \cdot 2\pi R^2 = 2q_1$

$A_v = \frac{6q_1 L}{2} = 3q_1 L = B_v$ (Symmetrie)

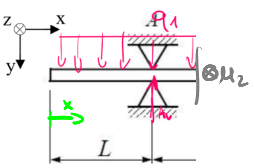
$I_1 = \frac{\pi}{4} R^4$

$I_2 = \pi R^4$

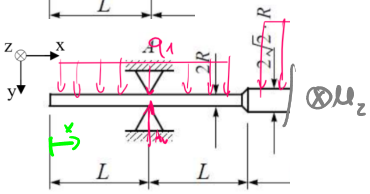
② Biegemomentenverläufe berechnen (Tipp: Symmetrie)



$0 < x < L:\ M_z(x) = q_1 \frac{x^2}{2}$



$L < x < 2L:\ M_z(x) = q_1 \frac{x^2}{2} - (x-L)\cdot 3q_1 L$



$2L < x < \frac{5}{2}L:\ M_z(x) = 2q_1 \frac{(x-2L)^2}{2} - q_1 L(x-L) = q_1(x-2L)^2 - q_1 L(x-L)$

③ Spannungen berechnen $\quad \sigma_x = -\frac{M_z(x)}{I_z} y$

Kritische Stellen bestimmen

Maximaler Betrag des Biegemoments mit kleineren Durchmesser

$0 < x < L:\ M_z(L) = q_1 \frac{L^2}{2}$

$0 < x < 2L:\ (M_z(\frac{3}{2}L) = q_1 \frac{9}{8} L^2 - \frac{3}{2} q_1 L^2)\ M(2L) = 2q_1 L^2 - 3q_1 L^2 = -q_1 L^2$

$\sigma_{max,1} = \frac{q_1 L^2}{\frac{\pi}{4} R^4} R = \frac{4 q_1 L^2}{\pi R^3}$

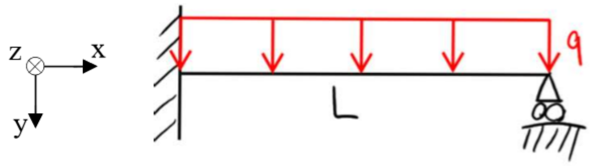
$2L < x < \frac{5}{2}L:\ M_z(\frac{5}{2}L) = q_1 \frac{L^2}{4} - \frac{3}{2} q_1 L^2 = -\frac{5}{4} q_1 L^2$

$\sigma_{max,2} = \frac{5 q_1 L^2}{4 \cancel{R^4} 3} \cdot \sqrt{2}\cancel{R} < \sigma_{max,1}$ ⇒ "die Spannung ist kritischer"

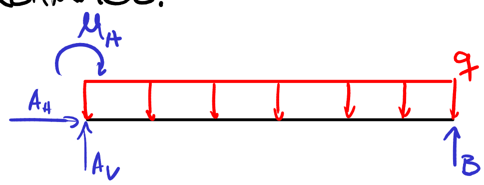
$\sigma_{max,1} = \sigma_{zul} = \frac{4 q_1 L^2}{\pi R^3} = \frac{4 f_G \cancel{\pi} \cancel{R^2} L^2}{\cancel{\pi} \cancel{R^3}}$ ⇒ $\underline{\underline{1.6 mm}} \Rightarrow R$

## Aufgabe H1:

Man berechne die Lagerreaktionen des gegebenen Systems. Man nehme an, dass das Flächenträgheitsmoment und der E-Modul gegeben sind.




1. GGB lösen und alle Lagerreaktionen in Abhängigkeit der noch Unbekannten Lagerreaktion/-en setzen. Die Anzahl der Unbekannten ist gleich dem Grad der Unbestimmtheit. Die Unbekannten durch Randbedingungen der Biegelinie bestimmen.




\# Unbekannte = 4

\# Gleichungen = 3

$\rightarrow$ Grad der Unbestimmtheit: 1

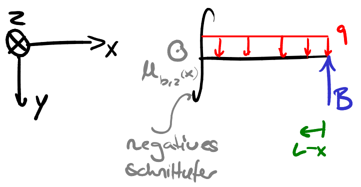
GGB lösen in Abhängigkeit von B

$F_x = 0: A_H = 0$

$F_y = 0: \; -A_V - B + q \cdot L = 0 \rightarrow A_V = qL - B$

$\overset{\curvearrowright}{M}{}^A_z = 0: \; M_A + \frac{1}{2} L q L - B \cdot L = 0 \rightarrow M_A = BL - \frac{qL^2}{2}$

2. Beanspruchung $\longrightarrow$ Biegemoment $M_{b,z}$




$$-M_{b,z}(x) + \frac{1}{2} q (L-x)^2 - B(L-x) = 0$$

$$M_{b,z}(x) = \frac{1}{2} q (L-x)^2 - B(L-x)$$

$$= \frac{q}{2} x^2 - qLx + \frac{qL^2}{2} + Bx - BL$$

$$= \frac{q}{2} x^2 + x(B - qL) + \left(\frac{qL^2}{2} - BL\right)$$

3. Biegelinie

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \iint M_{b,z}(x)\,dx = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{q}{24}x^4 + \frac{(B-qL)}{6}x^3 + \frac{\frac{qL^2}{2} - BL}{2}x^2 + C_1 x + C_2\right)$$

4. Randbedingung

Einspannung bei $x=0: \; v(0) = v'(0) = 0$

$v(0) = \frac{1}{EI_z} \cdot C_2 = 0 \quad v'(x) = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{q}{6}x^3 + \frac{(B-qL)}{2}x^2 + \left(\frac{qL^2}{2} - BL\right)x + C_1\right) \quad v'(0) = \frac{1}{EI_z} \cdot C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$$\hookrightarrow v(x) = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{q}{24}x^4 + \frac{(B-qL)}{6}x^3 + \frac{\frac{qL^2}{2} - BL}{2}x^2\right)$$

Auflager bei $x = L: \; v(L) = 0$

$$v(L) = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{q}{24}L^4 + \frac{(B-qL)}{6}L^3 + \frac{\left(\frac{qL^2}{2} - BL\right)}{2}L^2\right) = 0$$

$$qL^2 + 4(BL - qL^2) + 12\left(\frac{qL^2}{2} - BL\right) = 0$$

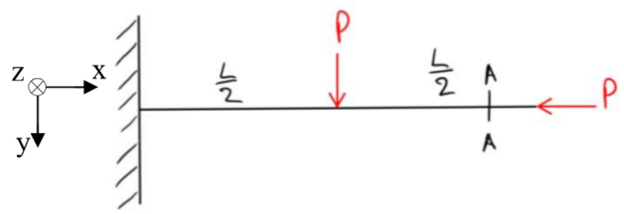
$$3qL^2 - 8BL = 0 \Rightarrow B = \underline{\underline{\frac{3}{8} qL}}$$

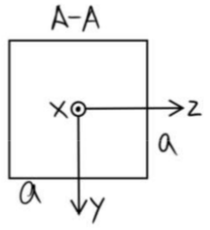
$$A_V = qL - B = \underline{\underline{\frac{5}{8} qL}}$$

$$M_A = BL - \frac{qL^2}{2} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right) qL^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{8} qL^2}}$$

## Aufgabe H2

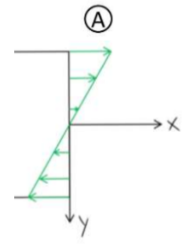
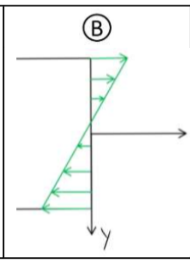
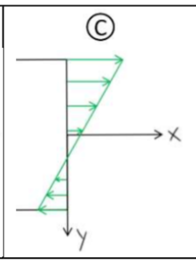
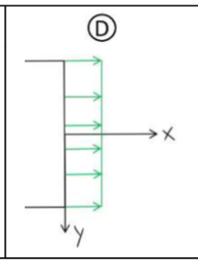
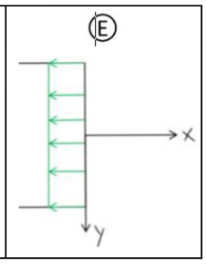
Ein Stab mit Querschnitt A-A wird folgendermassen beansprucht:



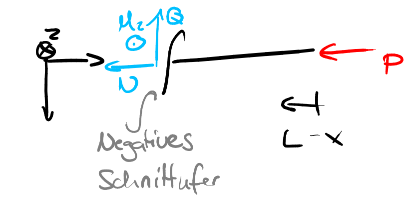




Geg: $a = 10cm, P = 10kN, L = 1m$

a) Welches der folgenden Bilder zeigt den korrekten Verlauf der Normalspannung im Querschnitt A-A?

| | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓓ | Ⓔ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 mögliche Antworten |  |  |  |  |  |

1. Beanspruchung im Abschnitt $[\frac{L}{2}, L]$ bestimmen.




$M_z = 0$

$Q = 0$

$N = -P$

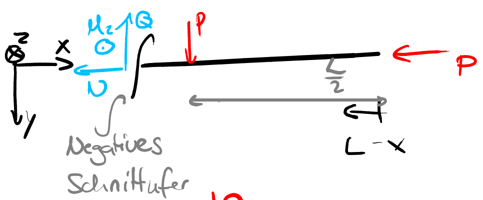
2. Spannungen im Schnitt A-A
   - keine Belastung durch Biegung ⇒ keine Biegespannung
   - Normalkraft < 0 ⇒ Stab ist auf Druck belastet; homogen verteilt auf Querschnittsfläche

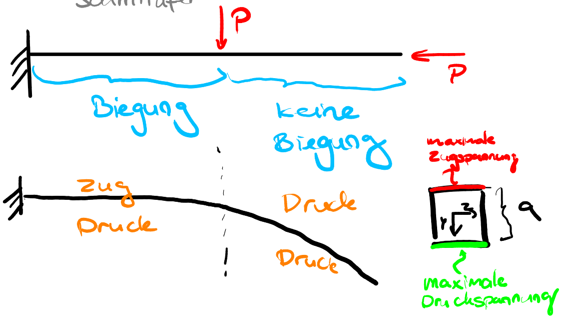
⇒ Ⓔ

b) Man berechne die maximale (=kritische) Normalspannung im ganzen Stab.

| 5 mögliche Antworten | Ⓐ | Ⓑ | Ⓒ | Ⓓ | Ⓔ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\sigma_{max} = 31MPa$ | $\sigma_{max} = -31MPa$ | $\sigma_{max} = -61MPa$ | $\sigma_{max} = 61MPa$ | $\sigma_{max} = -1MPa$ |

- Abschnitt $(\frac{L}{2}, L)$: $\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{P}{a^2} = -1MPa$
- Abschnitt $(0, \frac{L}{2})$: $-M + P(\frac{L}{2} - x) = 0 \rightarrow M = P(\frac{L}{2} - x)$




Superposition der Spannung durch Biegung und Normalkraft:

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad \text{mit} \quad I_z = \frac{a^4}{12}$$

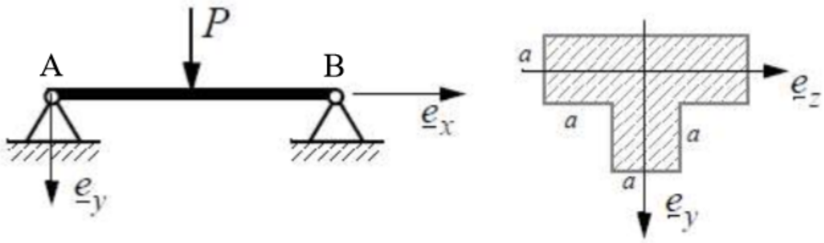
- Maximales Biegemoment in $x=0$: $M_z(0) = \frac{PL}{2}$
- Maximale Druckspannung: $y = \frac{a}{2}$

$$\sigma_{max}\left(0, \frac{a}{2}\right) = -\frac{P}{a^2} - \frac{\frac{PL}{2}}{\frac{a^4}{12}} \cdot \frac{a}{2} \approx -31MPa$$

↳ Ⓑ

## Aufgabe H3

Ein gewichtsloser Biegebalken (Länge $L$, E-Modul $E$) mit dem gezeichneten Querschnitt ist im Punkt $A$ und $B$ jeweils gelenkig gelagert. Der Balken wird in der Mitte durch eine Einzelkraft vom Betrag $P$ belastet.

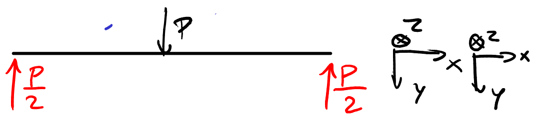



Die Lagerkräfte in x-Richtung sind vernachlässigbar, da keine äusseren Kräfte in x-Richtung wirken.

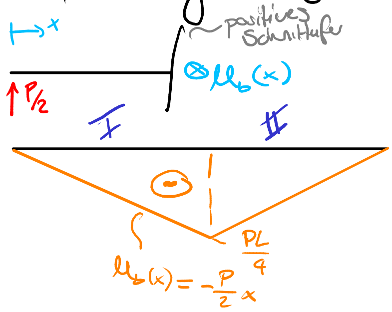
a) Man berechne die Biegelinie als Funktion von $x$.

1) Lägerkräfte bestimmen

↳ Symmetrie →




2) Beanspruchung → Biegemoment bestimmen




3) Biegelinie

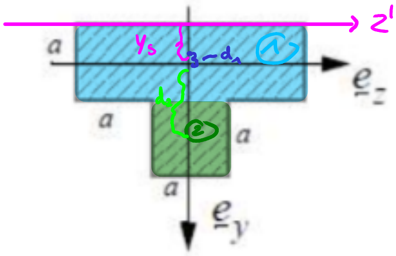
$$v_1(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_b(x)\,dx = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2\right)$$

nur gültig für Teil I

4) Randbedingungen

Auflager bei $x=0$: $v_1(0) = \frac{1}{EI_z}C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Symmetrie $x=\frac{L}{2}$: $v_1'(\frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow v_1'(x) = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{P}{4}x^2 + C_1\right) \Rightarrow v_1'(\frac{L}{2}) = \frac{1}{EI_z}\left(-\frac{P}{4}\frac{L^2}{4} + C_1\right) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{16}$




i) Schwerpunkt $y_s$

$$y_s = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{3a^2\cdot\frac{a}{2} + a^2\cdot\frac{3}{2}a}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4}a$$

ii) Flächenträgheitsmoment $I_z$

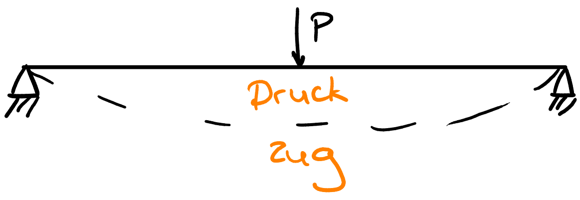
$$I_{z,1} = I_{z,1}^* + d_1^2 A_1 = \frac{3a\cdot a^3}{12} + \left(-\frac{1}{4}a\right)^2\cdot 3a^2 = \frac{a^4}{4} + \frac{3a^4}{16} = \frac{7}{16}a^4$$

$$I_{z,2} = I_{z,2}^* + d_2^2 A_2 = \frac{a^4}{12} + \left(\frac{3}{4}a\right)^2\cdot a^2 = \frac{a^4}{12} + \frac{9}{16}a^4 = \frac{31}{48}a^4$$

Superposition $I_z = I_{z,1} + I_{z,2} = \frac{21}{48}a^4 + \frac{31}{48}a^4 = \frac{52}{48}a^4 = \frac{13}{12}a^4$

$$\hookrightarrow v_1(x) = \frac{1}{EI_z}\cdot\left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL^2}{16}x\right) = \frac{12}{13a^4E}\left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL^2}{16}x\right) \text{ für } x\in(0,\tfrac{L}{2})$$

b) Man bestimme den Ort und Betrag der maximalen Zugspannung und der maximalen Druckspannung.



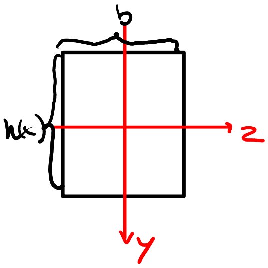

Maximale Spannungen findet man
(Nur Spannungen durch Biegemoment)
- an der Stelle mit maximale Biegemoment
- an Rand des Querschnitts

$$\sigma_{Druck} = -\frac{M_b\left(\frac{L}{2}\right)}{I_z} \cdot y_{min} = -\frac{-\frac{PL}{4}}{\frac{13}{12}a^4} \cdot \left(-\frac{5}{4}a\right) = -\frac{9}{52}\frac{PL}{a^3}$$

$$\sigma_{Zug} = -\frac{\frac{PL}{4}}{\frac{13}{12}a^4} \cdot \frac{5}{4}a = \underline{\underline{\frac{15}{52}\frac{PL}{a^3}}}$$

c) Man betrachte nun den beidseitig gelenkig gelagerten Balken unter Einzellast mit einem <u>Rechteckquerschnitt</u> der Höhe $h(x)$ und der Breite $b$. Wie muss der Verlauf der Querschnittshöhe $h(x)$ sein, damit die Normalspannung am Rande überall den Wert $\sigma_0$ hat?

$$M_b(x) = -\frac{P}{2}x \quad (\text{Teilaufgabe a})$$



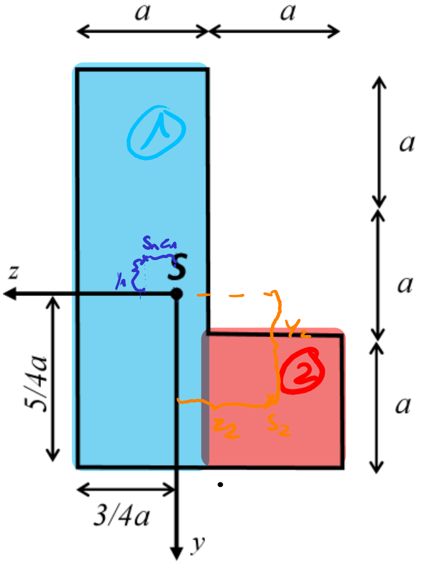

$$I_z = \frac{h^3(x) \cdot b}{12}$$

$$\sigma(x,y) = -\frac{M_b(x)}{I_z} \cdot y$$

$$y_{rand} = \frac{h(x)}{2}$$

$$\sigma(x, y_{rand}) = \frac{\frac{P}{2}x}{\frac{h^3(x) \cdot b}{12}} \cdot \frac{h(x)}{2} = \frac{3 \cdot P \cdot x}{h^2(x) \cdot b} = \sigma_0 \Rightarrow h(x) = \sqrt{\frac{3Px}{b\sigma_0}} \quad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$$

## Aufgabe H4:




Für den dargestellten Querschnitt sind die Position des Schwerpunktes S und die Flächenträgheitsmomente $I_z = \frac{37}{12}a^4$ und $I_y = \frac{13}{12}a^4$ bekannt.

a) Man bestimme das gemischte Trägheitsmoment $C_{yz}$.

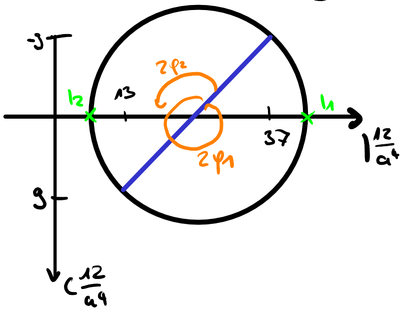
b) Man bestimme die Richtung der Hauptachsen und die dazugehörigen Trägheitsmomente.

a) $$C_{yz} = \underbrace{C_{yz,1} \overbrace{- y_1 z_1 A_1}^{\text{Steiner}}}_{C_{yz}^{(1)}} + \underbrace{C_{yz,2} \overbrace{- y_2 z_2 A_2}^{\text{Steiner}}}_{C_{yz}^{(2)}} = 0 - \left(-\frac{a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{4}\right) + 0 - \left(-\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot a^2 = \left(\frac{3}{16}+\frac{9}{16}\right)a^4 = \underline{\underline{\frac{3}{4}a^4}}$$

b)
$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 37 \end{bmatrix} \frac{a^4}{12}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + C_{yz}^2} = \left(\frac{50}{2} \pm \sqrt{\frac{(24)^2}{4} + 9^2}\right)\frac{a^4}{12} = (25 \pm 15)\frac{a^4}{12}$$

$$I_1 = \frac{10}{3}a^4 \qquad I_2 = \frac{5}{6}a^4$$

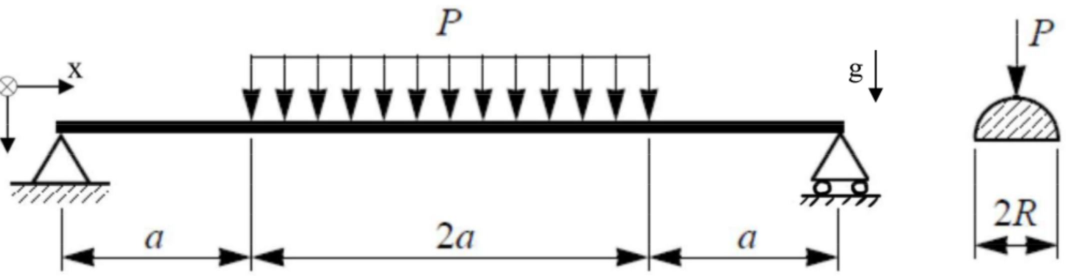



$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2C_{yz}}{I_z - I_y}\right) = 71.6°$$

$$\alpha_1 = \alpha_1 + 90 = 161.6°$$

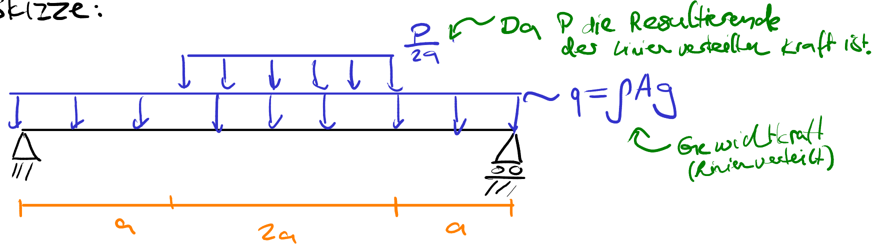
## Wiederholungsaufgabe:

Gegeben sei ein Balken mit halbkreisförmigen Querschnitt. Neben dem Eigengewicht wirkt als Belastung eine verteilte Last des Gesamtbetrags $P$ gemäss Skizze. Wie gross muss $R$ mindestens sein, damit die grösste Durchbiegung höchstens $\frac{R}{10}$ beträgt?

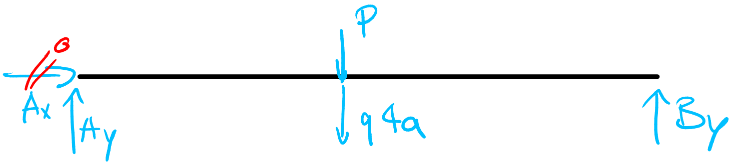



Geg: $P = 5kN, E = 210GPa, a = 50cm, \rho = 7{,}85\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}, g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$

1) Skizze:




2) Lagerkräfte

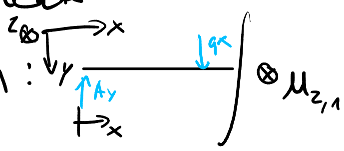



$$A_y = \frac{P + 4aq}{2}$$

(Symmetrie $\Rightarrow A_y = B_y$)

3) Biegemomente

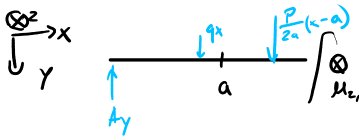
$0 \leq x \leq a$:




$\Sigma M_z$: $M_{z1}(x) - qx \cdot \frac{x}{2} \cdot A_y \cdot x = 0$

$$M_{z1}(x) = \frac{qx^2}{2} - A_y x$$

$a \leq x \leq 2a$




$\Sigma M_z$: $M_{z2}(x) - \frac{P}{2a}(x-a) \cdot \frac{(x-a)}{2} - qx \cdot \frac{x}{2} + A_y x = 0$

$$M_{z2}(x) = \frac{P}{4a}x^2 - \frac{2ax P}{4a} + \frac{Pa^2}{4a} + \frac{qx^2}{2} - A_y x$$

$$= \left(\frac{P}{4a} + \frac{q}{2}\right)x^2 - \left(A_y + \frac{P}{2}\right)x + \frac{Pa}{4}$$

4) Biegelinie

$$v_1(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_{z,1}(x)\,dx = \frac{1}{EI_z}\int\left(\frac{qx^3}{6} - \frac{A_y}{2}x^2 + C_1\right)dx = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{A_y}{6}x^3 + C_1 x + C_2\right)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_{z,2}(x)\,dx = \frac{1}{EI_z}\int\left(\left(\frac{P}{12a} + \frac{q}{6}\right)x^4 - \left(\frac{A_y}{2} + \frac{P}{4}\right)x^2 + \frac{Pa}{4}x + C_3\right)$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{48a} + \frac{q}{24}\right)x^4 - \left(\frac{A_y}{6} + \frac{P}{12}\right)x^3 + \frac{Pa}{8}x^2 + C_3 x + C_4\right)$$

5) Randbedingungen:

I) $v_1(0) = 0$, da Festlager

II) $v_1(a) = v_2(a)$
III) $v_1'(a) = v_2'(a)$ , da der Stab kein Knick hat.

IV) $v'(2a) = 0$ , da das System symmetrisch ist.

I) $\Rightarrow C_2 = 0$

II) $\Rightarrow \frac{1}{EI_z}\left(\frac{qa^4}{24} - \frac{A}{6}a^3 + C_1 a\right) = \frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{48a} + \frac{q}{24}\right)a^4 - \left(\frac{A_y}{6} + \frac{P}{12}\right)a^3 + \frac{Pa}{8}a^2 + C_3 a + C_4\right)$

$$C_1 = \frac{P}{48}a^2 - \frac{P}{12}a^2 + \frac{P}{8}a^2 + C_3 + \frac{C_4}{a}$$

$$C_1 = \frac{P}{16}a^2 + C_3 + \frac{C_4}{a}$$

III) $\Rightarrow \frac{1}{EI_z}\left(\frac{qa^3}{6} - \frac{A_y}{2}a^2 + C_1\right) = \frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{12a} + \frac{q}{6}\right)a^3 - \left(\frac{A_y}{2} + \frac{P}{4}\right)a^2 + \frac{Pa}{4}a + C_3\right)$

$$C_1 = \frac{Pa^2}{12} - \frac{P}{4}a^2 + \frac{P}{4}a^2 + C_3 \quad (II \to III)$$

$$\frac{P}{16}a^2 + C_3 + \frac{C_4}{a} = \frac{Pa^2}{12} + C_3$$

$$C_4 = \frac{P}{48}a^3$$

IV) $\frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{12a} + \frac{q}{6}\right)8a^3 - \left(\frac{A_y}{2} + \frac{P}{4}\right)\cdot 4a^2 + \frac{Pa}{4}2a + C_3\right) = 0$

$$\frac{2Pa^2}{3} + \frac{4q}{3}a^3 - 2A_y a^2 - Pa^2 + \frac{Pa^2}{2} + C_3 = 0$$

$$C_3 = -\frac{Pa^2}{6} - \frac{4q}{3}a^3 + 2A_y a^2$$

$$C_3 = \frac{a^2}{6}\left(12A_y - P - 8qa\right)$$

IV, III $\to$ II $\quad C_1 = \frac{P}{16}a^2 + \frac{a^2}{6}\left(12A_y - P - 8qa\right) + \frac{P}{48}a^2$

$$C_1 = \frac{a^2}{12}\left(24A_y - P - 16qa\right)$$

$$\Rightarrow v_1(x) = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{A_y x^3}{6} + \frac{a^2}{12}\left(24A_y - P - 16qa\right)x\right)$$

$$\Rightarrow v_2(x) = \frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{48} + \frac{q}{24}\right)x^4 - \left(\frac{A_y}{6} + \frac{P}{12}\right)x^3 + \frac{Pa}{8}x^2 + \frac{a^2}{6}\left(12A_y - P - 8qa\right)x + \frac{P}{48}a^3\right)$$

6. Schwerpunkt


$S_\xi = 0$ (Symmetrie)

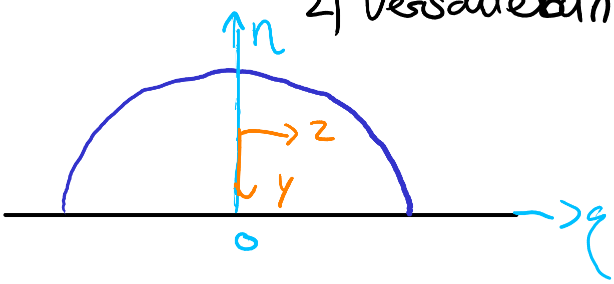
$S_\eta = \frac{1}{A}\iint \eta \, dA = \frac{1}{A}\int_0^\pi \int_0^R r\sin\varphi \; r \; dr\, d\varphi$ $\quad$ (Polarkoordinaten $\eta = r\sin(\varphi)$

$= \frac{1}{A}\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{1}{A}\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R = \frac{1}{A}\frac{2}{3}R^3 \overset{A = \frac{\pi R^2}{2}}{=} \frac{4R}{3\pi}$

## 7) Flächenträgheitsmoment

Vorgehen: 1) Flächenträgheitmoment um 0

2) Verschiebung in Schwerpunkt mit Satz von Steiner




$$I_{z,bzgl.0} = \iint_A \eta^2 dA = \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin^2\varphi \, r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^R r^3 \, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi 1-\cos(2\varphi) \, d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_0^\pi \cdot \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{4}R^4 = \frac{R^4}{8}\pi$$

$$I_z = I_{z,bzgl.0} + \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{8\pi}\right)$$

## 8) R berechnen

max Durchbiegung in der Mitte des Balkens $\Rightarrow v_z(x=2a) \leq \frac{R}{10}$

$$\frac{1}{EI_z}\left(\left(\frac{P}{48a} + \frac{q}{24}\right)16a^4 - \left(\frac{A_y}{6} + \frac{P}{12}\right)8a^3 + \frac{Pa}{8}4a^2 + \frac{a^2}{6}(12A_y - P - 8qa)2a + \frac{P}{48}a^3\right) \leq \frac{R}{10} \quad \Big| \; A_y = \frac{P+4aq}{2}$$

$$\frac{1}{EI_z}\left(\frac{19}{16}Pa^3 + \frac{10}{9}qa^4\right) \leq \frac{R}{10} \quad \Big| \; q = \rho A g = \rho \frac{\pi R^2}{2} g$$

$$\Big| \; I_z = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

$$\frac{3a^3\pi(57P + 80a\rho g \pi R^2)}{2ER^4(9\pi^2 - 64)} \leq \frac{R}{10} \Longrightarrow R = 0.252\,m = \underline{\underline{252\,mm}}$$