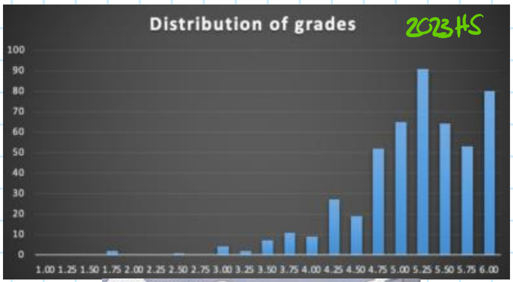
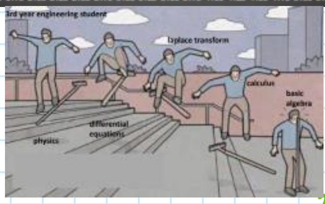
0 Organisatorisches

- ▷ Materialien auf Website: https://n.ethz.ch/~rpeedikayil/
    - Am Abend nach dem PVK ⇝ komplette Notizen
- ▷ Ablauf:
    - Für die Prüfung notwendige Theorie
    - Beispiele zur Theorie (u.a alte Prüfungsaufgaben)
    - Selbstständiges Lösen von Beispielen und Fragen
    - Morgen: Laplace und Fourier
    - Nachmittag: PDE's
- ▷ Fragen:
    - E-Mail: rpeedikayil@ethz.ch
    - General Forum oder Group specific Forum (G-11) auf Moodle
- ▷ Prüfung:
    - 4 Credits
    - Format: 9 × SC-Fragen (ca. 50%)
      2 × Offene Fragen (ca. 50%)
    - 2 Stunden
    - Erlaubte Hilfsmittel:
        - ↳ 20 A4 Seiten / 10 Blätter Zusammenfassung
            - → Meine Zusammenfassung findet Ihr auf meiner Website
            - → Druckt ZF so früh wie möglich aus
        - ↳ Englisch ⇔ Deutsch-Wörterbuch





2023HS

Prüfungsblock I (neues Reglement) — MAVT / alle Studiengänge / davon Repetenten

	# Stud.		Ø		std. dev.		# best.	# nicht best.	bestanden
Gesamt	398		4.65		0.56		364	34	91.5%
Thermodynamik I		428	4.16	4.15	0.81	0.80			67.8%
Mechanics III		522	4.48	4.44	0.64	0.65			81.0%
Control Systems I		451	4.79	4.78	0.62	0.62			92.2%
Elektrotechnik		452	4.71	4.63	0.80	0.84			81.6%
Analysis III		487	5.20	5.16	0.66	0.68			94.3%

2022HS

Prüfungsblock I — MAVT / alle Studiengänge / davon Repetenten

	# Stud.		Ø		std. dev.		# best.		# nicht best.		bestanden	
Gesamt	402	27	4.58		0.59		344	18	58	9	85.6%	66.7%
Thermodynamik I		360	4.3	4.3	0.81	0.81						71.4
Dimensionieren I		359	4.35	4.35	0.92	0.92						79.4
Dynamics		483	4.62	4.54	0.65	0.69						82.3
Regelungstechnik I		373	4.75	4.76	0.67	0.67						87.7
Analysis III		396	4.84	4.8	0.79	0.84						88.9

2021HS

Prüfungsblock I — MAVT / alle Studiengänge / davon Repetenten

	# Stud.		Ø		std. dev.		# best.		# nicht best.		bestanden	
Gesamt	354	25	4.55		0.65		296	18	58	7	83.6%	72.0%
Thermodynamik I	360		4.08	4.07	0.87	0.87					66.4%	
Dimensionieren I	359		4.46	4.46	0.90	0.89					68.8%	
Dynamics	483		4.35	4.30	0.82	0.85					77.4%	
Regelungstechnik I	373		4.61	4.61	0.71	0.71					91.9%	
Analysis III	396		5.59	5.60	0.62	0.62					97.0%	

- ▷ Prüfungsvorbereitung:
    - Gezielt Theorie repetieren mit PVK Notizen von mir oder PVK von Gioele Zardini (falls nötig) } findet Ihr auf meiner Website
    - Alte Prüfungen von Iozzi lösen } findet Ihr auf meiner Website
- ▷ Analysis III: Laplace Transform, Fourier Analysis, Partial Differential Equations

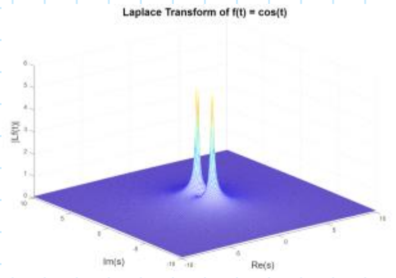
1 Laplace Transformation

Differentialgleichung $f(t)$ "Zeitbereich" $\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}$ Algebraische Gleichung $\mathcal{L}(f(t))(s)$ oder $F(s)$

⇝ Mit Laplace-Transforms können wir gewisse „DGL" viel einfacher lösen

⇝ wird in Elektrotechnik und Controls Systems verwendet

Def. $$\boxed{F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\,dt \qquad s \in \mathbb{C}}$$



$\mathcal{L}(f(t))(s)$ existiert im Interval (k,∞):

- $f(t)$ ist "piecewise continuous"/stückweise stetig:
  - unterteilbar, sodass jeder Intervall stetig
  - unterteilbar, sodass an den Endpunkten eines Intervalls endliche Grenzwerte sind
- $f(t)$ ist wachstumsbeschränkt, wenn $M, k \in \mathbb{R}$ mit $M, k > 0$ gibt, sodass $|f(t)| \leq Me^{kt}$
  ⇝ d.h. f ist (höchstens von exponentieller Ordnung)

Berechnung Laplace Transform:
1. Integral (Definition)
   ↪ (Partielle Integration, Substitution)
2. Umformen/Vereinfachen (Eigenschaften) und Tabelle (Bsp. 4)
   ↪ (Partialbruchzerlegung, trig. Identitäten etc.)

Bsp. 1

$f(t) = \cos(\omega t) \qquad F(s) = ?$

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos(\omega t)(s)) = \int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot e^{-st}\,dt \overset{\text{Part. Integration}}{=} -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(\omega t)\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(\omega t)\,dt$$

$$\overset{\text{Part. Integration}}{=} 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) - \frac{\omega}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\sin(\omega t)\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(\omega t)\,dt\right) = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Hinweis: Falls die Funktion nicht stetig ist, kann man die Tabellen nicht verwenden! Man muss die Funktionen Intervalle unterteilen und partiell integrieren. Als Alternative kann man auch die Heaviside-Funktion verwenden.

1.1 Linearität

i. $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$ (Funktionen f, g; Skalar α, β)

ii. $\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G)$

$\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^{-1}$ sind linear

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Bsp. 2

$f(t) = 1 + 2t + 3t^3 \qquad F(s) = ?$

$$\mathcal{L}(1 + 2t + 3t^3) = \mathcal{L}(1) + 2\mathcal{L}(t) + 3\mathcal{L}(t^3) \overset{\text{siehe Tabelle}}{=} \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3\cdot 3!}{s^{3+1}} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{18}{s^4}$$

1.2 s-shifting

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$e^{at} \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$$

Bsp. 3

$$f(t) = e^{-at} \cdot t \qquad F(s) = ?$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \cdot t) = \mathcal{L}(t)\,(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

siehe Tabelle

1.3 Inverse Laplace Tranformations

Keine analytische Definition für $\mathcal{L}^{-1}$ wie bei $\mathcal{L}$ ⇝ Reverse Engineering { 1. Umformen/Vereinfachen 2. Tabellen

Bsp. 4

$$F(s) = \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s-1} \qquad f(t) = ?$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3} - \frac{1}{s-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = \underline{\underline{2t^2 - e^t}}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Bsp. 5

$$F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13} \qquad f(t) = ?$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+6s+9-9+13} = \frac{1}{(s+3)^2+2^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin(2t) \cdot e^{-3t}}}$$

Bsp. 6.

$$F(s) = \frac{s}{s^2-1} \qquad f(t) = ?$$

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)\cdot(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \quad \Big| \cdot (s+1)\cdot(s-1)$$

$$s = A(s+1) + B(s-1)$$

$1: \; A - B = 0 \Rightarrow A = B$

$s: \; 1 = A + B \qquad 1 = 2A \qquad A = \frac{1}{2} = B$

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \underline{\underline{\cosh(t)}}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

14 Partialbruchzerlegung

1. einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)}$
2. doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
3. komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{(z.B.: x^2+1)}$

Beispiel: $\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

$$= \frac{A\cdot(x+1)\cdot(x-1) + B\cdot(x+1)^2\cdot(x-1) + C\cdot(x+1)^3}{(x+1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

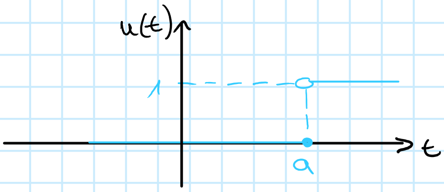
$$\left|\begin{array}{c} -A-B+C=0 \\ -B+3C=1 \\ A+B+3C=0 \\ B+C=0 \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$$

Tipp: $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$

1.4 Heaviside-Funktion

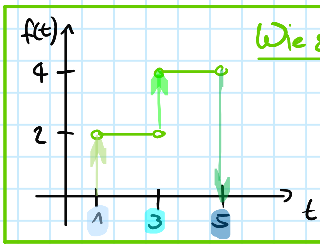
Def

$$u(t-a) := \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \qquad \forall a \geq 0$$



- Verwendet um abrupte Änderungen in Signalen oder Systemen darzustellen

Bsp. 7



Wie stellt man eine unstetige Funktion mit der Heaviside-Funktion dar?

$$f(t) = \underline{\underline{2u(t-1) + 2u(t-3) - 4u(t-5)}}$$

1.5 t-shifting

- Verschiebung/Verzögerung der Funktion im ursprünglichen Zeitbereich

↳ t-shifting: Verschiebung der Funktion im t-Domäne

↳ s-shifting: Verschiebungen der Funktion ($\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$) in s-Domäne

Def $\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}}$

Def $\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}}$

⤳ Aufgabe 2 von der Serie 1 konnte man auch wie folgt lösen: Funktion mit Heavisidefunktionen darstellen und dann t-shifting und Tabelle

- Man kann eigentlich meistens beide Definitionen verwenden.

↳ Tipps: $f(t)$ zu $f(t-a)$ umformen:

Ergänzen & Erweitern, Periodizität, Additionstheorem

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

wäre mit Def. 2 schneller einfach $\mathcal{L}\{(t+1)^2\}$ berechnen jedoch auch mit Def. 1 lösbar

Bsp. 8

$\mathcal{L}(u(t-1) \cdot t^2) = ?$

$F(s) = \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (\underbrace{t^2 - 2t + 1 \quad + 2t - 1}_{\text{0 erweitern}})\} = \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot ((t-1)^2 + 2t - 1)\}$

$= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2 + 2t\,u(t-1) - u(t-1)\}$ (ausmultiplizieren)

$= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2 + 2(t-1)\,u(t-1) + 2u(t-1) - u(t-1)\}$

$= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2\} + 2\mathcal{L}\{(t-1) \cdot u(t-1)\} + \mathcal{L}\{u(t-1)\}$

t-shifting

$= e^{-s} \mathcal{L}\{t^2\} + 2 \cdot e^{-s} \cdot \mathcal{L}\{t\} + e^{-s} \mathcal{L}\{1\} = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$$
$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

...

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Def. 1 und Def. 2 etwa gleich schnell

Bsp. 9

$\mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot \cos(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot \cos(t)\} \overset{\text{Trig. Identität}}{=} \mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot (-\cos(t-\pi))\} = -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\cos(t)\} = -e^{-\pi s} \frac{s}{s^2+1}$

Def. 1 und Def. 2 etwa gleich schnell

Bsp. 10

$\mathcal{L}\{u(t+2)\sin(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{u(t+2)\sin(t)\} = \mathcal{L}\{u(t+2)\sin(t+2-2)\} \overset{\text{Additionstheorem}}{=} \mathcal{L}\{u(t+2)((\sin(t+2)\cos(2) - \sin(2) \cdot \cos(t+2))\}$

$= e^{2s}(\cos(2)\,\mathcal{L}\{\sin(t)\} + \sin(2) \cdot \mathcal{L}\{\cos(t)\}) = e^{2s}\left(\cos(2) \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin(2)\frac{s}{s^2+1}\right)$

1.6 Laplace von Ableitungen

Def. $\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0) \quad \forall n \geq 1}$

$n=1$: $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f) - f(0)$

$n=2$: $\mathscr{L}(f'')(s) = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

$n=3$: $\mathscr{L}(f''')(s) = s^3\mathscr{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$

Bedingungen: 1) $|f| \leq Me^{kt}$ (wachstumsbeschränkt)

2) $f^{(n)}$ stückweise stetig

3) $f, f', \ldots f^{(n-1)}$ stetig $\forall\, t \geq 0$

Lösen einer gewöhnlichen DGL mit Laplace Transformation

Kochrezept: 1. Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen

2. Nach Laplace von gesuchter Funktion (im Bsp. $Y(s)$) auflösen

3. Inverse Laplace, um $y(t)$ zu bestimmen

Bsp. 11

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad y(t) = ?$$

1) $\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\} \qquad \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$

$s^2 Y(s) - s\,\underset{1}{\underline{y(0)}} - \cancel{y'(0)}^{\,0} - sY(s) + \underset{1}{\underline{y(0)}} - 2Y(s) = s^2 Y(s) - s - sY(s) + 1 - 2Y(s) = 0$

2) $Y(s)(s^2 - s - 2) = s - 1$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$(s-2)(s+1)\cdot \Rightarrow \quad s - 1 = A(s+1) + B(s-2) = \frac{1}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+1)}$

$$\left.\begin{aligned} s:&\ 1 = A + B \\ 1:&\ -1 = A - 2B \end{aligned}\right\}\ominus \quad 2 = 3B \quad B = \frac{2}{3} \quad A = 1 - B = \frac{1}{3}$$

3) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}}}$

- Falls Anfangswertproblem $\Rightarrow y(a) = \ldots,\ y'(a) = \ldots$ für $a \neq 0$

Kochrezept: 1) Substitution mit $\eta = (t - a) \Rightarrow u(\eta) = y(\eta + a);\ u'(\eta) = y'(\eta + a); \ldots$

$\Rightarrow u(0) = y(0 + a),\ u'(0) = y'(0 + a); \ldots$

2) Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen

3) Nach Laplace von gesuchter Funktion (im Bsp. $U(s)$) auflösen

4) Inverse Laplace, um $u(\eta)$ zu bestimmen

5) Rücksubstitution: $\eta = t - a$

1.7 Laplace von Integrale

Laplace Transformation von Integralen können umgeschrieben werden in eine Laplace Transformation, welche nur von $f(t)$ abhängig ist.

Def. $$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}$$

→ Beim Inversen Laplace Transform können wir jetzt diese Eigenschaft verwenden, falls $\frac{1}{s}$ Terme vorkommen anstatt Partialbruchzerlegung

Bsp. 12

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t+\sin t)\,dt\right\}(s) = ?$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t t+\sin t\,dt\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{t+\sin t\}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+1}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s(s^2+1)}}}$$

Bsp. 13

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = ?$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin(t)\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(\tau)\,d\tau\right\}\right\} = \underline{\underline{-\cos(t)+1}}$$

Bsp. 14

Prüfungsaufgabe HS 2015

Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\cos(t)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) - \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s} = \mathcal{L}(f(t))\left(1-\frac{1}{s}\right) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{(s^2+1)\left(1-\frac{1}{s}\right)} = \frac{s^2}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{C}{(s-1)}$$

$$s^2 = A(s^2-s) + B(s-1) + C(s^2+1)$$

s^2: $1 = A + C$ $\quad 1 = A + A \Rightarrow A = \frac{1}{2} = B = C$

s: $0 = -A + B$ $\quad A = B$

1: $0 = -B + C$ $\quad B = C$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\cos(t)+\sin(t)+e^{t}\right)}}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a\geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n\in\mathbb{Z}\geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a\geqslant 0$	e^{-as}

14 Partialbruchzerlegung

1. einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)}$
2. doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
3. komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{(z\cdot B:x^2+1)}$

Beispiel: $\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

$= \frac{A\cdot(x+1)\cdot(x-1)+B\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)+C\cdot(x+1)^3}{(x+1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

$$\left|\begin{array}{c} -A-B+C=0 \\ -B+3C=1 \\ A+B+3C=0 \\ B+C=0 \end{array}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}$$

Tipp: $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$

1.8 Integration von Laplace Transforms

Wir können die Integration von einer Laplace Transformation durch Laplace Transformation von dieser Funktion $f(t)$ geteilt durch t beschreiben.

Def. $$\boxed{\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\,d\sigma = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{t} f(t)\}(s)}$$

~ Diese Eigenschaft gilt eigentlich nur falls $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existiert.

Bsp. 15

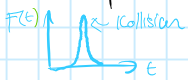
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2}\right\} = ?$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^\infty \frac{4}{(\sigma-2)^2}\,d\sigma = 4\int_s^\infty (\sigma-2)^{-2}\,d\sigma = 4\left[\frac{-1}{\sigma-2}\right]_s^\infty = \frac{4}{s-2}$$

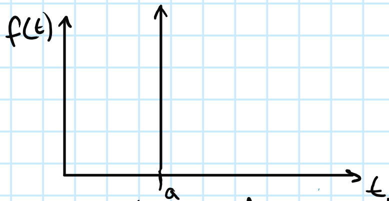
$$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4\cdot e^{2t} \quad f(t) = \underline{\underline{4\cdot e^{2t}\cdot t}}$$

1.9 Dirac's Delta Funktion

Mit der Dirac's Delta Funktion können wir beispielsweise bei Kollisionen grosse Kräfte, die rückartig auftreten, approximieren.



Def. $$\boxed{\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}}$$



Mathematisch gesehen ist Dirac's Delta keine Funktion sondern eigentlich ein Grenzwert einer Funktion.
Wir können Dirac's Delta durch die Heaviside Funktion definieren.

Def.
$$\delta(t-a) := \lim_{h\to 0} f_h(t-a) \quad \text{mit} \quad f_h(t-a) = \left(\tfrac{1}{h}\left(u(t-a) - u(t-(a+h))\right)\right) = \begin{cases} 1/h & t\in[a, a+h] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hirbei gilt $$\int_0^\infty f_h(t-a)\,dt = \int_a^{a+h} \frac{1}{h}\,dt = 1$$

Breite $\hat{=}\, h$ · Höhe $\hat{=}\, \frac{1}{h}$ · Fläche $\hat{=}$ Breite · Höhe $\hat{=}\, 1$

Eigenschaften

- Integral der Dirac's Delta Funktion

Def. $$\boxed{\int_0^\infty \delta(t-a) = 1}$$

- Integral der Dirac's Delta Funktion, welche mit einer Funktion multipliziert wird

Def. $$\boxed{\int_0^\infty g(t)\,\delta(t-a)\,dt = g(a)}$$

Bsp. 16

$\int t^2 \delta(t-2)\,dt = ?$

$$\int_0^\infty t^2\,\delta(t-2)\,dt = 2^2 = 4$$

- Zusammenhang zur Heaviside Funktion

Def $\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau}$ $\rightsquigarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\delta(\tau)\} \overset{\text{Tabell}}{=} \frac{1}{s} e^{-as}$

$\hookrightarrow \mathcal{L}\{\delta(\tau)\} = e^{-as}$ (siehe nächste Eigenschaft)

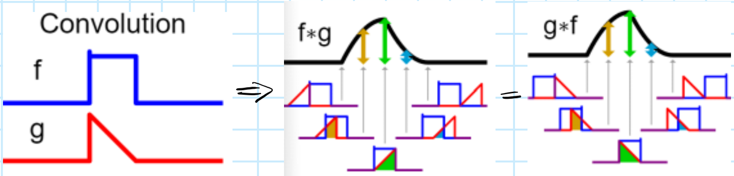
- Laplace Transform der Dirac's Delta Funktion

Def $\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}}$

1.10 Convolutions

Die Convolution / Faltung zweier Funktion ist definiert als:

Def $\boxed{f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$



- Diskrete Convolutions werden unter anderem für Bildverarbeitung (Informatik II / SML) und Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht.
- Wir verwenden in Analysis III kontinuierliche Convolutions. $\rightsquigarrow$ Integral anstatt Summe

Die Faltung (Convolution) kann als spezielle "Multiplikation" angesehen werden, welche ein Mass der Überschneidung angibt.

Für die Laplace Transformation einer Faltung (Convolution) gilt:

Def $\boxed{\mathcal{L}\{\underbrace{f}_{f(t)} * \underbrace{g}_{g(t)}\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s)}$

$\rightsquigarrow$ Falls wir in der s-Domäne eine Multiplikation sehen, können wir die Inverse als Convolution darstellen.

$\rightsquigarrow$ wir können jetzt alternativ zur Partialbruchzerlegung manchmal eine Faltung (Convolution) verwenden

Eigenschaften

Def

1. $f*g = g*f$ (Kommutativ)	4. $f*0 = 0*f = 0$
2. $f*(g+h) = f*g + f*h$ (Assoziativ)	5. $f*1 = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \neq f$
3. $f*(g*h) = (f*g)*h$ (Distributiv)	6. $f*f$ kann negativ sein!

Bsp 17.

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2\right\} = \, ?$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\cos(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\cos(t)\}\}$$

Convolution

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\cos t * \cos t\}\} = \cos t * \cos t = \int_0^t \cos t \cdot \cos(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \cos t \int_0^t \cos(t-\tau)\, d\tau = \cos t\, \left[-\sin(t-\tau)\right]_0^t = \underline{\underline{\cos t \sin t}}$$

Prüfungsaufgabe FS 2017

1. Laplace Trasform (*8 Points*)

Let $a > 0$. Solve the following initial value problem using the Laplace transform.

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = \delta(t-a) & \text{for } t \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Please justify your answer.

Bsp. 18

1) $\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{\int_0^t y(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\,d\tau\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$ ← convolution

$sY(s) - \cancel{y(0)}^{0} + \mathcal{L}\{y(t) * \cos(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$

$sY(s) + \mathcal{L}\{y(t)\}\cdot\mathcal{L}\{\cos(t)\} = sY(s) + Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1} = Y(s)\left(s+\frac{s}{s^2+1}\right) = e^{-as}$

2) $Y(s) = \frac{e^{-as}}{s\left(1+\frac{1}{s^2+1}\right)} = \frac{(s^2+1)\cdot e^{-as}}{s(s^2+2)}$

$\frac{s^2+1}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2}\right)$

$s^2+1 = A(s^2+2) + (Bs+C)s$

$s^2:\ 1 = A + B \Rightarrow B = 1$

$s:\ 0 = C$

$1:\ 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

3) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2+1}\right\}$

$\overset{\text{t-shifting}}{=} \frac{1}{2}\cdot u(t-a)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t-a) + \frac{1}{2}\cdot u(t-a)\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{2}^2}\right\}(t-a)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}u(t-a)\left(1 + \cos(\sqrt{2}(t-a))\right)}}$

1.11 Laplace Transforms an Prüfungen

- Normalerweise nur 1-2 MC-Fragen zu LT-Transforms
- DGL Lösen
- Inverse Laplace Tranformationen

↳ Hierzu brauchen wir die Eigenschaften

	Initial Value Problem	Integral Equation	(Inverse) Transform
W 17	x		
S 17	x		
W 18		x	
S 18	x		
W 19	x		
S 19		x	
W 20	x		
S 20		x	
W 21	x		
S 21		x	
W 22	x		
S 22	x		
W 23	MC		MC
S23	MC		MC
W24	MC		
S24	MC		MC

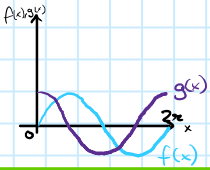
2.1 Periodische Funktionen

Eine Funktion ist periodisch, wenn ein $p \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}}$

Bsp. 19

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) = \sin(x+2\pi) \\ g(x) &= \cos(x) = \cos(x+2\pi) \end{aligned}\right\} p = 2\pi$$



Bsp. 20

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$.

a) Show that it is periodic of period 2π.

$\Rightarrow f(x) \stackrel{!}{=} f(x+2\pi)$

$\sin(ax+\pi) = -\sin(x)$

$$f(x+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = f(x)$$

Eigenschaften:

1. Für eine Funktion $f(x)$, welche p-periodisch ist, gilt, dass sie auch $n \cdot p$-periodisch ist

"fundamental period" (kleinstes p)

Def. $\boxed{f(x+np) = f(x) \quad n \in \mathbb{Z}}$

2. Linearkombination zweier Funktion f, g mit Periode p ist auch p-periodisch

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p);\; g(x) = g(x+p) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x+p) + bg(x+p) \quad a, b \in \mathbb{R}}$

3. Periodische Funktion $f(x)$ mit Periode p, welche mit dem Faktor a gestaucht/gestreckt wird, ist $\frac{p}{a}$-periodisch

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(ax) = f(a(x+\tfrac{p}{a})) \quad a \in \mathbb{R}}$

4. Die Linearkombination zweier periodischen Funktionen (f mit Periode p und g mit Periode q) ist ebenfalls periodisch und zwar mit der Periode $r = \text{kgV}(p,q)$)

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p);\; g(x) = g(x+q) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x+\text{kgV}(p,q)) + bg(x+\text{kgV}(p,q))}$

Diese Eigenschaften werden wir häufiger brauchen (auch an Prüfungen (siehe Bsp. 9))

Bsp. 21

Bestimme die Periodizität von $\cos(nx)$ und $\sin(mx)$

Wir verwenden Eigenschaft 3:

siehe Bsp. 1

$$\begin{cases} \sin(x) = \sin(x+2\pi) \Rightarrow \sin(mx) = \sin\left(m\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{m}\text{-periodisch} \\ \cos(x) = \cos(x+2\pi) \Rightarrow \cos(nx) = \cos\left(n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{n}\text{-periodisch} \end{cases}$$

Bestimme die Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$

① Wir verwenden Eigenschaft 3 bzw. Beispiel 2:

↳ Periodizität der Summanden bestimmen: • $\sin(3x) \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$-periodisch

• $\cos(5x) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}$-periodisch

② Wir verwenden Eigenschaft (4):

↳ Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$: $\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$-periodisch

$\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$

Bsp. 22

Methode 1 (Vorlesung):

① Gleichnamig machen:

$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{5}; \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{3}{3} \Leftrightarrow \frac{10\pi}{15}; \frac{6\pi}{15}$

② kgV von Zahler (Koefficienten)

$\text{kgV}(10, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

↳ $10 \hat{=} 2\ 5$

$6 \hat{=} 2 \cdot 3$

③ Kürzen falls nötig:

$\frac{30\pi}{15} = 2\pi$ //

Methode 2 (Ich):

① kgV des Zähler:

$\text{kgV}(2\pi, 2\pi) = 2\pi$

(Oft 2π ausser wir haben ein Faktor kleiner 1 im sinus/cosinus)

② ggT der Nenner

$\text{ggT}(3,5) = 1$

$3 \hat{=} 1 \cdot 3$

$5 \hat{=} 1 \cdot 5$

③ kgV durch ggT teilen

$\frac{2\pi}{1} = 2\pi$ //

Wie bestimmen wir eigentlich ob eine Funktion nicht periodisch ist:

• Beschränktheitssatz (boundedness theorem):

Def: Falls $f(x)$ periodisch und stetig ist, sind $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ begrenzt.

Bsp. 23

Ist $\cos(x^3)$ periodisch?

Annahme: Falls $f(x) = \cos(x^3)$ periodisch $\Rightarrow$ begrenzt $\Rightarrow f'$ auch begrenzt

$f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 \Rightarrow$ nicht begrenzt $\Rightarrow$ nicht periodisch //

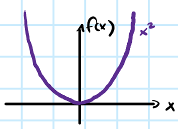
2.2 Gerade/Ungerade Funktion

Def:

• $f(x)$ ist gerade, falls $f(-x) = f(x)$

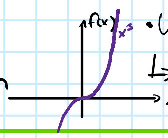
• $f(x)$ ist ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$

Bsp. 24



• Gerade Funktion

↳ spiegelsymmetrisch



• Ungerade Funktion

↳ punktsymmetrisch

Eigenschaften:

- $f(x)$ ist gerade: $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$
- $f(x)$ ist ungerade: $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0$
- gerade · gerade "=" gerade
- ungerade · gerade "=" ungerade
- ungerade · ungerade "=" gerade
- gerade + gerade "=" gerade
- ungerade + ungerade "=" ungerade
- (ungerade)' = gerade
- (gerade)' = ungerade

Bsp. 25

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ gerade oder ungerade?

$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

"=" gerade + gerade "=" gerade

Bsp. 26

$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(x^2)$ gerade oder ungerade?

$f(-x) = \sin(-\pi x) + \sin((-x)^2) = -\sin(\pi x) + \sin(x^2) \Rightarrow$ weder noch

"=" ungerade + gerade "=" weder noch

Bsp. 27

$f(x) = (\sin^2(x))'$ gerade oder ungerade?

$f(x)$ "=" (ungerade · ungerade)' "=" (gerade)' "=" ungerade

2.3 Fourier-Reihe

Für $f(x)$ mit Periode $2L$ gilt:

Def.

$$f(x) = \underbrace{a_0}_{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

In der Vorlesung

$$a_0 = \frac{1}{\cancel{2}L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$ ← Mittelwert der Funktion

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$ ← $n=0 \Rightarrow a_0$

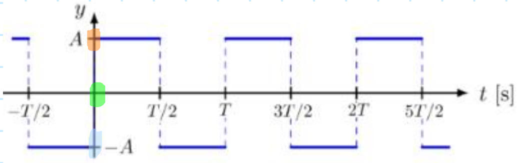
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

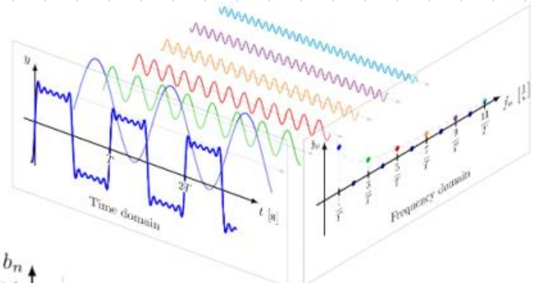
- Intuition:
- ein Signal kann als Linearkombination von Cosinus respektive Sinustermen dargestellt werden bei verschiedenen Frequenzen
- a_n bzw b_n sagen uns wie viel $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ bzw. $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
  ↳ hierbei kann n variieren und ist proportial zur Frequenz
- Um zu wissen wieviel cosinus bzw. sinus in unsere Funktion vorkommt, können wir Skalarprodukt verwenden

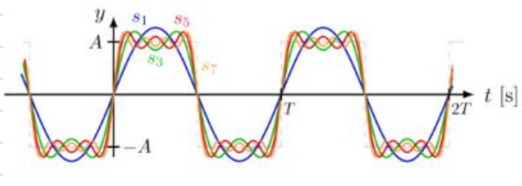
→ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ (Skalarprodukt zweier Funktionen) $\Leftrightarrow$ $b_n = \underbrace{\frac{1}{L}}_{\text{Normalisierung}}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$ ← Basisvektor

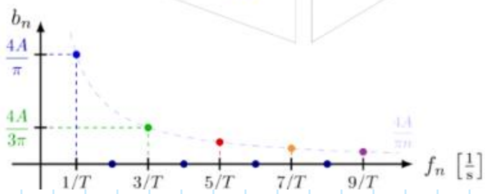
(Parallele ⊥ Amplitude bei S gibt an wieviel ist in der Funktion vorkommt)

• Idee: Beliebige periodische Signale aus einem <u>diskreten</u> Frequenzspektrum superponieren:









Anwendungen: 1) Signale analysieren ⇝ bestimmen welche Frequenzen in einem Signal
(Fourier Analysis) vorkommen, um diese eventuell zu modifizieren (z.B Equalizer)
2) Quantemechanik ⇝ Teilchen ist in eine Superposition von sogenannten "Eigenstates"
3) Partielle Differentialgleichungen lösen

2.3.1 Dirichlet-Theorem

$f(x)$ muss aber nicht unbedingt stetig sein. Jedoch konvergiert Fourier zu einem Grenzwert an den Unstetigkeiten und zwar:

linker/rechter Grenzwert

Def.
$$\boxed{f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f^+(x_0) + f^-(x_0)\right) \qquad f^\pm(x_0) = \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)}$$

2.3.2 Vereinfachungen und Vorgehensweise

Def.

Falls $f(x)$ gerade:	Falls $f(x)$ ungerade:
• $b_n = 0$	• $a_0 = a_n = 0$
• $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$	• $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$
• $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$	

Orthogonalitätsrelationen

gilt nicht für Grenze 0–L

(1) $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ L, & n=m\neq 0 \\ 2L, & n=m=0\end{cases}$

(2) $\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ L, & n=m\neq 0\end{cases}$

(3) $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = 0$

Wichtige Eigenschaften: $\sin(n\pi)=0$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ (Seite 11 ZF)

• Kochrezept:

Gegeben $f(x)$ mit Periode p auf Definitionsbereich $(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$

1) Bestimme L: $2L = p \to L = \frac{p}{2}$
2) f gerade/ungerade → Vereinfachung der Fourier-Serie verwenden
3) Berechne a_0, a_n, b_n ⇒ Tipp: Orthogonalität, Parität, Koeffizientenvergleich, trig. Identitäten oder partielle Integration
4) stelle $f(x)$ als Fourier-Reihe dar

8 Appendix

8.1 Umwandlungen

Gegeben: $n \in \mathbb{N}$

$\sin(\pi n) = 0 \quad ; \quad \cos(\pi n) = (-1)^n$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j+1 \\ (-1)^j, & n = 2j\end{cases}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n+2}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2j \\ (-1)^j, & n = 2j+1\end{cases}$

$\sin(x)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos((1-n)x) - \cos((n+1)x))$

$\cos(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))$

$\sin\left((n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\cos\left((n\pm 1)\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

etc.

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$.

(a) Show that it is periodic of period 2π.) → haben wir schon gelöst ✓

b) Compute its Fourier series.

c) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = ?$$

1) Bestimme L: $p = 2\pi = 2L \Rightarrow L = \pi$

2) Gerade / Ungerade: $f(-x) = |\sin(\frac{-x}{2})| = |-\sin(\frac{x}{2})| = |\sin(\frac{x}{2})| = f(x) \Rightarrow$ gerade

3) Koeffizienten bestimmen: a_0, a_n, b_n

- $b_n = 0$

Bsp. 28

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(\frac{x}{2})|\,dx \overset{\sin(\frac{x}{2}) = |\sin(\frac{x}{2})| \text{ für } x\in[0,\pi]}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-2\cdot\cos(\frac{x}{2})\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$

- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin(\frac{1}{2}x)|\cdot\cos(\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(\frac{1}{2}x)\cdot\cos(nx)\,dx$

Trig. Identität

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^\pi \left(\sin((\tfrac{1}{2}-n)x) + \sin((\tfrac{1}{2}+n)x)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((\frac{1}{2}-n)x)}{\frac{1}{2}-n} - \frac{\cos((\frac{1}{2}+n)x)}{\frac{1}{2}+n}\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cancel{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-n\pi)}{\frac{1}{2}-n}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}-n} - \frac{1}{\pi}\cancel{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{\frac{1}{2}+n}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}+n} = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}+\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}}{\frac{1}{4}-n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

4) $f(x)$ als Fourier-Reihe darstellen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)$$

c) x_s so wählen, dass wir ähnliche Form erhalten wie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} \Rightarrow \cos(nx_s) = 1 \Rightarrow x_s = 0, \pi, 2\pi \ldots$

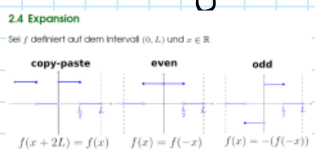
Wir wählen $x_s = 0$: $\quad f(0) = |\sin(\frac{0}{2})| = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

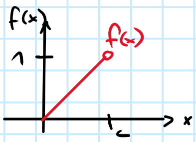
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

2.3.3 Half-Range-Expansion

Eine Funktion, die nur auf einem begrenzten Intervall definiert ist, lässt sich periodisch auf einen grösseren Intervall erweitern. Üblicherweise wird das begrenzte Intervall als halbe Periode definiert.

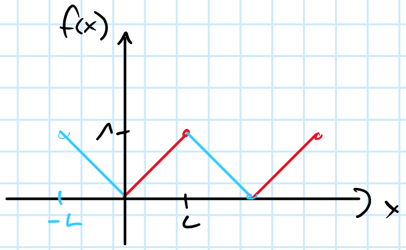


Bsp. 29



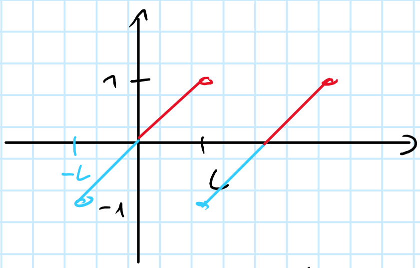
- $f(x) = x \quad x \in [0, L)$

- even-expansion



↳ spiegelsymmetrisch (y-Achse)

- odd-expansion



↳ punktsymmetrisch (Ursprung)

2.4 Komplexe Fourier-Reihe

Ausgehend von der normalen Fourier Reihe: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$ kann man die äquivalente komplexe Fourier Reihe herleiten, indem man die Euler-Beziehung: $\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ verwendet:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{L}x}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}+c_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

(Details im Vorlesungsskript)

Für eine 2L-periodische Funktion ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

Def.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{\frac{i\pi n}{L}x}=c_0+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}c_n e^{\frac{i\pi n}{L}x}\quad \text{mit}\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot e^{-\frac{i\pi n}{L}x}\,dx\quad\text{und}\quad c_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx}$$

Die reale und komplexe Fourier Reihe enthalten die genau gleichen Informationen und man kann die Koeffizienten einfach umrechnen:

Def.

- $a_0=c_0$; $a_n=c_n+\overset{\text{anstatt } n\to -n}{c_{-n}}$; $b_n=i(c_n-c_{-n})$
- $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$ $\qquad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)$

Oft sind folgende Relationen hilfreich für komplexe Fourier-Reihen:

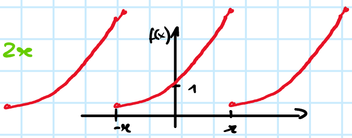
$$\boxed{e^{i\pi}=-1\ ;\ e^{\pm in\pi}=(-1)^n}$$

Manchmal sind auch folgende Beziehungen hilfreich:

$e^{ix}+e^{-ix}=\cos(x)$; $e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin(x)$; $e^{\pm ix}=\cos(x)\pm i\sin(x)$

Bsp. 30

geg: $f(x)=e^x$ für $-\pi<x<\pi$ mit Periode 2π



Berechne komplexe Fourier-Reihe

1) Bestimme L: $\cancel{2}L=p=\cancel{2}\pi \Rightarrow L=\pi$

2) Bestimme Koeffizienten:

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\frac{i\pi n}{L}x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cdot e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-in)}\left[e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{\pi}\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n}-e^{-\pi}\cdot\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(-1)^n\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]=\frac{1}{\pi}(-1)^n\sinh(\pi)\frac{1}{1-in}$$

$$=\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n\frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

3) Komplexe Fourier-Reihe zusammensetzen: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\frac{n\pi}{L}x}=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n$ //

Koeffizienten der Fourier-Reihe a_0, a_n, b_n bestimmen:

$$a_0=c_0=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^0\cdot\frac{1+0}{1+0}=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\ //$$

$$a_n=c_n+c_{-n}=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left((-1)^n\cdot\frac{1+in}{1+n^2}+(-1)^{-n}\cdot\frac{1+i(-n)}{1+(-n)^2}\right)=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n\frac{2}{1+n^2}\ //$$

$$b_n=i(c_n-c_{-n})=i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left((-1)^n\cdot\frac{1+in}{1+n^2}-(-1)^{-n}\cdot\frac{1+i(-n)}{1+(-n)^2}\right)=i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n\frac{2in}{1+n^2}$$

$$=\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{2n}{1+n^2}\ //$$

Prüfungsaufgabe Winter 2023

1.MC4 [3 Points] The complex Fourier series of the function $\cosh(ax)$ on the interval $[-\pi, \pi)$ is given by

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n a \sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)} e^{inx}.$$

Find the value of the numerical series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)}$.

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$.

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{2\pi}{a\sinh(a\pi)} - \frac{2}{a^2}$.

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{2\pi}{a\sinh(a\pi)}$.

Bsp. 31

Wir wählen x so aus, dass wir eine möglichst ähnliche Form wie in der gesuchten numerischen Reihe erreichen. Zudem sollten wir $\cosh(ax)$ an dieser Stelle kennen $\Rightarrow x = 0$.

$$\cosh(ax) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n a \sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)} e^{inx}$$

$$\cosh(a\cdot 0) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a\sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)} \underbrace{e^{in0}}_{1} = \frac{a\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

$$\frac{\pi}{a\sinh(a\pi)} = \frac{1}{a^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} \overset{\text{symmetrisch bezüglich } n}{=} \frac{1}{a^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad //$$

2.5 Fourier Integral

Das Fourier Integral von einer Funktion $f(x)$ ist gegeben als:

Def.
$$f(x) = \int_0^\infty [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]\, d\omega$$
$$A(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(\omega v)\, dv$$
$$B(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)\, dv$$

Bedingungen: I piecewise continuous / stückweise stetig

II linke und rechte Ableitungen existieren

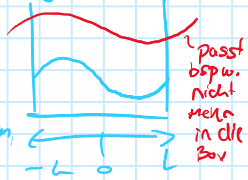
III Absolut integrierbar ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$)

Das Fourier Integral kann als Erweiterung zur Fourier-Reihe angesehen werden, welche jetzt auch für nicht-periodische Funktionen funktioniert. ($L \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$)

Indem wir die Periode von $2L$ auf ∞ ändern, erhalten wir von der Fourier-Reihe
$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ das Fourier Integral $F(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cdot\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega$
(Herleitung im Skript). Achtung: Jetzt brauchen wir anstatt ein diskretes Spektrum an Frequenzen ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen, Daher wird die Summe über alle Frequenzen zu einem Integral über alle Frequenzen.

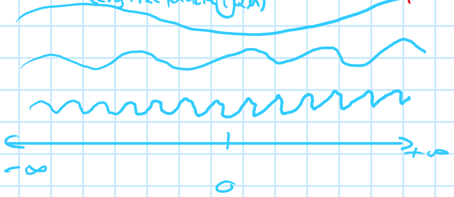
Intuition: Wieso haben wir jetzt ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen

Fourier-Reihe (e.g. Particle in a Box (QM))



Fourier Integral (e.g. Free particle (QM))

jetzt passen alle Frequenzen in die Box



Je nach Parität unserer Funktion können wir gewisse Vereinfachungen einführen.

Für gerade Funktionen gilt:

Def.

$$\boxed{A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(\omega v)\,dv \qquad B(\omega) = 0 \qquad f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega}$$

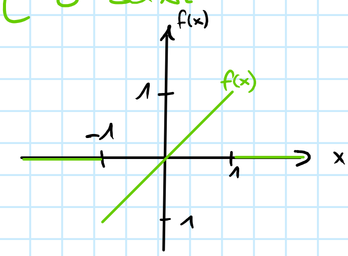
Für ungerade Funktionen:

Def

$$\boxed{A(\omega) = 0 \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cdot\sin(\omega v)\,dv \qquad f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega}$$

Bsp. 32

Berechne das Fourier Integral der Funktion $f(x) = \begin{cases} x & , |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



① f(x) gerade oder ungerade?

$f(-x) = -x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

↳ Wir können die Vereinfachung für ungerade Funktionen verwenden

② Koeffizienten berechnen

$A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(\omega v)\,dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 v\sin(\omega v)\,dv + \cancel{\int_1^\infty 0\,dv}^{\,0}$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} v\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega v)\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\int_0^1 \cos(\omega v)\,dv$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi\omega}\cos(\omega) + 0\right]_0^1 + \frac{2}{\pi\omega^2}\left[\sin(\omega v)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi\omega}\cos(\omega) + \frac{2}{\pi\omega^2}\sin(\omega) = \frac{2}{\pi\omega^2}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)$$

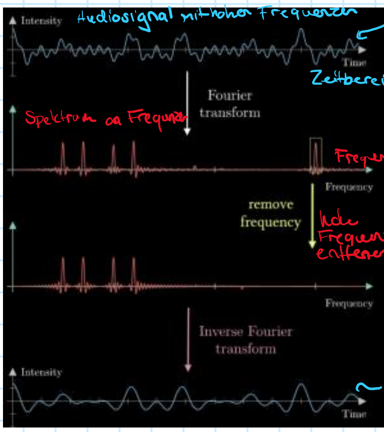
③ Fourier Integral bestimmen ⇝ Müssen die Integrale selten auswerten

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega^2}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)\sin(\omega x)\,d\omega$$

2.6 Fourier Transformation

Wenn wir jetzt alle sin- und cos-Terme durch Eulerschreibweise ersetzen, können wir vom Fourier Integral aus das komplexe Fourier Integral herleiten. Das komplexe Fourier Integral beschreibt die (Inverse) Fourier Transformation. Man kann es sich auch als kontinuierlich und nicht periodische alternative zur komplexe Fourierreihe vorstellen und kann FT auch hier wieder mit $L\to\infty$ bzw $\omega_n\to 0$ herleiten.

Die Fourier Transformation wird wie folgt definiert:



nicht mehr periodisch ↪ FT anstatt FR

Audio signal ohne hohe Frequenzen

Def

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \hat f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt \qquad \omega\in\mathbb{R}}$$

Man kann auch eine Inverse bestimmen:

Def

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat f(\omega)\}(t) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega}$$

manchmal anstatt t auch x

sehen wir bald

Anwendung: • Lösen von gewöhnlichen und partiellen DGL's
• Bild-/Audiobearbeitung

Bsp. 33

Prüfungsaufgabe Winter 2016

Bestimme Fourier Transform von der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1\end{cases}$

$$\hat f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-i\omega x}\,dx + \cancelto{0}{\int_{1}^{\infty} 0\,dx}\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx - \int_{-1}^{1} x^2\cdot e^{-i\omega x}\,dx\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\Big(-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \Big[\Big(x^2\Big(-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\Big)\Big)\Big|_{-1}^{1} + \Big(\frac{+1}{i\omega}\Big)\int_{-1}^{1} 2x\, e^{-i\omega x}\,dx\Big]\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{1}{i\omega}\big(\cancel{e^{i\omega}}-\cancel{e^{-i\omega}}\big) + \frac{1}{i\omega}\big(\cancel{e^{-i\omega}}-\cancel{e^{i\omega}}\big) - 2\Big[\Big(\frac{1}{\omega^2}x e^{-i\omega x}\Big)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega x}\,dx\Big]\Big]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big[-\frac{1}{\omega^2}\big(1\cdot e^{i\omega} - (-1)e^{-i\omega}\big) + \Big(\frac{1}{i\omega^3}e^{-i\omega x}\Big)\Big|_{-1}^{1}\Big]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{2}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\big(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\big) + \frac{2}{\omega^3}\,\frac{1}{2i}\big(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\big)\Big) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega) + \frac{2}{\omega^3}\sin(\omega)\Big) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3} \quad \text{für } \omega\neq 0$$

für $\omega = 0$:
$$\hat f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\Big)$$
$$= \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\hat f(\omega) = \begin{cases}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{für } \omega = 0\\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3} & \text{, sonst}\end{cases}$$

Eigenschaften der Fourier Transformation

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x-shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ia\omega}\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t-shifting, aber ohne Heaviside
- ω-shift: $\underline{F(\omega - a)}_{\hat{f}(\omega-a)} = \mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\}$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}$ } ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -i\,\mathcal{F}\{x \cdot f(x)\}(\omega)$ } ähnlich wie bei Laplace nicht. (wird noch auf ZF ergänzt)
- Faltung (Convolutions): $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ } auch ähnlich wie bei Laplace aber $\sqrt{2\pi}$-Term

Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\,dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ak^2+bk+c)}\,dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

Bsp. 34

1.MC3 [3 Points] Solve the following integral equation using the Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)g(y)\,dy = e^{-4x^2}.$$

where

$$g(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

(A) $f(x) = \frac{1}{8i\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{8}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

(B) $f(x) = \frac{1}{8i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{8}} \sin(\omega) e^{i\omega x}\,d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{8i\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{16}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{8i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{16}} \frac{\omega}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

1.8 Convolution (Faltung)

$(f * g)(t) = \int f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$

2.9 Fourier Transform

$\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$

$\mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f \cdot g)$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\,dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $a=4$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)}\,dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt$$

x/t je nach Aufgabe

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x}\,d\omega$$

$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega\mathfrak{F}(f(x))$

$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2\mathfrak{F}(f(x))$

$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = \mathfrak{F}''(f(x))$

	$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
3)	$\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < 1, \\ 0, & \lvert x\rvert > 1. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$

Auf der ersten Seite der Prüfung hats eine ZF, welche gewisse LT, FT und Integrale die man verwenden kann. → Nicht vergessen!

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)\,g(y)\,dy\right\} = \mathcal{F}\left\{e^{-4x^2}\right\}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dx} * g(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} e^{-i\omega x}\,dx$$

$$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dx}\right\} \cdot \mathcal{F}\{g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\cdot 4}}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2\cancel{\pi}}\, i\cancel{\omega}\, \mathcal{F}\{f(x)\} \cdot \sqrt{\frac{2}{\cancel{\pi}}}\,\frac{\sin(\omega)}{\cancel{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2\cancel{\pi}}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{4}}$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{2i\sqrt{8}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}$$

$$f(x) = \cancel{\mathcal{F}}^{-1}\left\{\cancel{\mathcal{F}}\{f(x)\}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i\sqrt{8}}\, e^{\frac{-\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}\, e^{i\omega x}\,d\omega = \underline{\underline{\frac{1}{8i\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}\, e^{i\omega x}\,d\omega}}$$ (C)

Prüfungsaufgabe Winter 2023

1.MC3 [3 Points] Let f be a continuous function such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2}.$$

(A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega$.

(B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega$.

(C) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega$.

(D) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega$.

Bsp. 35

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt}$$

x/t je nach Aufgabe

$$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2 \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die **inverse** Fourier Transformation von g ist:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega}$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)} dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$F\{f(x) + f'(x) + 4f''(x)\} = \hat{f}(\omega) + i\omega \hat{f}(\omega) - 4\omega^2 \hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega)(1 + i\omega - 4\omega^2) = F\{\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\pi x^2}\} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cancel{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i\omega x} dx \overset{a=\pi}{=} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega - 4\omega^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$f(x) = F^{-1}\{\underbrace{F(f(x))(\omega)}_{\hat{f}(\omega)}\} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x} d\omega}} \quad (C)$$

Prüfungsaufgabe Winter 2020

3.c) Let $f(x)$ be a function with Fourier transform equal to $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$. Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Bsp. 36

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx$$

Wir wählen x, so dass das Integral möglichst dem gegebenen Integral ähnelt $\Rightarrow \omega = 0$

$$\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\cancel{\pi}}} \frac{1}{1+0} = \frac{1}{\sqrt{2\cancel{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{2}}$$

2.7 Diskrete Fourier Transformation

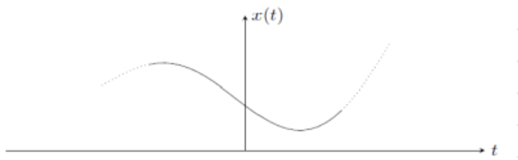
Bis jetzt haben wir immer kontinuierliche Signale bzw. Funktion in der Zeitdomäne betrachtet. Diese Woche schauen wir uns an wir unsere "Werkzeuge", insbesondere Fourier Transformation, für diskrete Signale anpassen können

Aber wieso eigentlich diskrete Signale?

Digitale Geräte (wie Computer, Smartphones, etc) können nur diskrete Daten verarbeiten. Man hat zwar vielleicht kontinuierliche Signale aus der realen Welt, die über einen unendlich Bereich definiert sind, aber alle digitalen Geräte besitzen nur endliche Datenmengen.

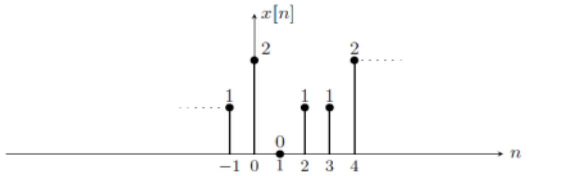
Kontinuierliche Signale

- $x(t)$: t ist kontinuertlich $t \in \mathbb{R}$
- $x(t)$ nimmt kontinuierliche Werte an



Diskrete Signale

- $x[n]$: n ist diskrete, ganze Zahle ($n \in \mathbb{Z}$) ↝ Notation von Signal system für diskrete Signale
- $x[n]$ kann kontinuierliche oder diskrete Werte annehmen



- Laplace Tranformation
- (Fourier Reihe) / Komplexe Fourier Reihe
- (Fourier Integral) / Fourier Transformation

- Z-Transform (erst in Signals and systems)
- Diskrete Fourier Reihe (DFS) (erst in Signals and systems)
- Diskrete Fourier Transformation (DFT) ↳ schauen wir uns an!

→ Im Gegensatz zur kontinuierlichen Fourier Transformation, analysiert DFT nur eine endliche Menge von Werten $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ eines Signals, dass an n Abtastzeiten ($t_j = \frac{2\pi j}{n}$ $\forall\, j = 0, 1, \dots n-1$) bestimmt wird

Wir suchen eine Fourierreihe die das verhalten an diesen diskreten Punkten beschreibt:

Def. $\boxed{f(t) = c_0 + c_1 e^{2it} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)it}}$ $c_k \hat{=}$ Gewichte der Frequenzenkomponenten

Um die Koeffizienten zu berechnen, können wir die DFT Formel verwenden:

Def $\boxed{c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot e^{-ik \overbrace{\frac{2\pi j}{n}}^{t_j}} \quad \forall\ k = 0, 1, \dots n-1}$

Um die Ausgangsdaten aus den transformierten Werten c_k zurückzuerhalten, verwenden wir die Inverse DFT:

Def $\boxed{f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot e^{ik \overbrace{\frac{2\pi j}{n}}^{t_j}} \quad \forall\ j = 0, 1, \dots n-1}$

Wir iterieren in beiden Fallen über k und j. Wir konnen zwei verknüpften Summe auch als Matrix auffassen

↳ Fourier Matrix:

- Die Fourier Matrix M_n hat Dimension $n \times n$ ↜ Länge unseres Signal
- Jeder Eintrag ist eine Potenz der Einheitswurzel $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$
- Die Einträge der Matrix in der k-ten Zeile und j-ten Spalten ist $\omega_n^{k \cdot j} = e^{(2\pi i/n) k \cdot j}$ ↝ Die gleichen Exponentialfunktionen wie bei der DFT-Formel als alternative Representation
- Die Fourier Transformation kann man wie folgt definieren:

Def. $$\boxed{C = M_n \cdot F \quad \text{mit} \quad F := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix};\ C := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad M_n := \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{\omega_n^{k \cdot j} = \omega_n^0 = e^0 = 1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \left(\omega_n^{k \cdot j}\right)_{k,j=0,\dots,n-1} = \left(e^{(2\pi i/n) k \cdot j}\right)_{k,j=0,\dots,n-1}}$$

- Bei der Inversen Matrix hat einfach die invertierten Einheitswurzeln. Das bedeutet dass die Einträge nur $\omega_n^{-k \cdot j} = e^{-(2\pi i/n) k \cdot j}$ sind. Die Inverse DFT konnen wir wie folgt beschreiben:

Def. $$\boxed{C = M_n^{-1} \cdot F \quad \text{mit} \quad F := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix};\ C := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad M_n^{-1} := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{\omega_n^{-k \cdot j} = \omega_n^0 = e^0 = 1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \dots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \dots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \dots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\left(\omega_n^{-k \cdot j}\right)_{k,j=0,\dots,n} = \frac{1}{n}\left(e^{-(2\pi i/n) k \cdot j}\right)_{k,j=0,\dots,n-1}}$$

1. Discrete Fourier transform (DFT)

Let $N = 4$ and f be a function whose the following values,

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 0, \quad f\left(2\frac{2\pi}{N}\right) = 6, \quad f\left(3\frac{2\pi}{N}\right) = 3.$$

Find the discrete Fourier transform (DFT) of the function f with th numerical values given above. And write down the finite trigonometr representation of the function f with the coefficients that you found.

Steps:

1) Find the value of w_4.
2) Compute the entries of the matrix $\mathbf{M}_4^{-1}$ using the formula
$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{N}[w^{-jk}].$$
3) Use the formula
$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F},$$
where $\mathbf{F} = [2 \quad 0 \quad 6 \quad 3]^\top$ to find $\mathbf{C} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3]^\top$.
4) Use Euler's formula to pass from the finite complex Fourier series
$$f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + c_3 e^{3it}$$
to the finite trigonometric representation.

Bsp. 37

1) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n=4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

2) Formel: $\boxed{M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(1-n)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$n=4: M_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i^{-1} & i^{-2} & i^{-3} \\ 1 & i^{-2} & i^{-4} & i^{-6} \\ 1 & i^{-3} & i^{-6} & i^{-9} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}}}$$

3) Formel: $\boxed{C = M^{-1} F}$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 \\ -4+3i \\ 5 \\ -4-3i \end{pmatrix}}}$$

4) Formel $\boxed{f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + c_3 e^{3it}}$ Formel: $\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$

$$f(t) = \frac{1}{4}\Big(11 + (-4+3i)\big(\cos(t) + i\sin(t)\big) + 5\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) + (-4-3i)\big(\cos(3t) + i\sin(3t)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(11 + \big(-4\cos(t) - 4i\sin(t) + 3i\cos(t) - 3\sin(t)\big) + 5\cos(2t) + 5i\sin(2t) + \big(-4\cos(3t) + 3\sin(3t) - 3i\cos(3t) - 4i\sin(3t)\big)\Big)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\big(11 - 4\cos(t) - 3\sin(t) + 5\cos(2t) - 4\cos(3t) + 3\sin(3t)\big) + \frac{i}{4}\big(-4\sin(t) + 3\cos(t) + 5\sin(2t) - 3\cos(3t) - 4\sin(3t)\big)}}$$

2.8 Fast-Fourier-Transform (FFT)

Die Fast Fourier Transformation ist ein Algorithmus zur Berechnung der diskreten Fourier Transformation Anstatt DFT direkt zu berechnen wir eine rekursive Methode, welche die Anzahl der Operationen von $O(n^2)$ auf $O(\log(n) \cdot n)$ reduziert.

Die DFT braucht n^2 komplexe Multiplikation und Additionen bei einer Eigangssequenz von der Länge n. Die FFT nutzt die Struktur der Fourier-Matrix, um das Problem in kleinere Teile aufzuteilen.

Für eine Eigangsfolge mit geraden und ungeraden Indizes wird die DFT in zwei Summen aufgeteilt.

Def. $$\boxed{c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot e^{-2\pi i kj/n} = \sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j} e^{-2\pi i k 2j/n} + \sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j+1} e^{-2\pi i k(2j+1)/n}}$$

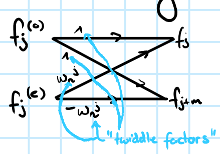
← n muss eine Zweierpotenz sein

Da nun jede dieser kleineren Summen auch eine DFT ist, können wir rekursiv das gleiche Verfahren mit der Länge 2 erreichen, welche eine geschlossene Lösung (Multiplikation mit 1 bzw (-1)) erreichen. ⤳ (Divide and Conquer)

Das gleiche kone wir die Inverse DFT machen, welche in der Vorlesung genauer betrachtet worden ist:

Def.
$$f_j = \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k}\, \omega_m^{jk}}^{f_j^{(o)}} + \omega_n^j \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k+1}\, \omega_m^{jk}}^{f_j^{(e)}} = f_j^{(o)} + \omega_n^j f_j^{(e)} \quad \text{mit } m := \frac{n}{2}$$
$$f_{j+m} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k}\, \omega_m^{jk}}_{f_j^{(o)}} - \omega_n^j \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k+1}\, \omega_m^{jk}}_{f_j^{(e)}} = f_j^{(o)} - \omega_n^j f_j^{(o)} \quad \forall j = 0, \dots, m-1$$

Graphische Darstellung (Butterfly pattern)



Wir können hier auch wieder die Matrixnotation einführen

↳ ähnliche Formeln kann auch für c aufstellen
↳ seht ihr bei Bsp. 3/5

Def.

$$\boxed{\begin{gathered} F = M_n\, C \quad \text{mit} \quad F := \begin{pmatrix} F^{(o)} \\ F^{(e)} \end{pmatrix} \quad F^{(o)} = \begin{pmatrix} f_0^{(o)} \\ f_1^{(o)} \\ \vdots \\ f_{m-1}^{(o)} \end{pmatrix} \quad F^{(e)} = \begin{pmatrix} f_0^{(e)} \\ f_1^{(e)} \\ \vdots \\ f_{m-1}^{(e)} \end{pmatrix} \\ M_n := \begin{pmatrix} M_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} F^{(o)} \\ F^{(e)} \end{pmatrix} \quad C^{(o)} = \begin{pmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \\ \vdots \\ c_{m-1}^{(o)} \end{pmatrix} \quad C^{(e)} = \begin{pmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \\ \vdots \\ c_{m-1}^{(e)} \end{pmatrix} \quad m := n/2 \end{gathered}}$$

3. Fast Fourier Transform (FFT)

Compute the Fast Fourier Transform (FFT) of the same function given in exercise 1. Check that you get the same result.

Steps:

1) Find the value of w_M, where $M = \frac{N}{2}$.
2) Compute the even and odd coefficients $\mathbf{C}^{(o)}$ and $\mathbf{C}^{(e)}$ using the formula

$$\mathbf{C}^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{f}^{(o)}, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{C}^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{f}^{(e)}$$

3) Find the value of w_N.
4) Compute the coefficient c_k using the formulas for $k < M$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + w_N^{-k} c_k^{(e)}\right).$$

And for the coefficient c_k with $k \geq M$,

$$c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - w_N^{-k} c_k^{(e)}\right).$$

1) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = M = \frac{N}{2} = 2: \quad \omega_2 = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = \underline{\underline{-1}}$

2) Formel: $\boxed{C^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(o)}}$ $\boxed{C^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(e)}}$

Formel: $\boxed{M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{-(1)\cdot(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{(o)} = M_2^{-1} f^{(o)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{pmatrix}}}$$

Bsp. 38

$$C^{(e)} = M_2^{-1} f^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{pmatrix}}}$$

3) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = N = 4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \underline{i}$

4) Formel: $\boxed{c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + \omega_N^{-k} c_k^{(e)}\right)}$ $\boxed{c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - \omega_N^{-k} c_k^{(e)}\right) \quad \forall k \geq M \; (M = \tfrac{N}{2})}$

Aus Aufgabe 1) $F = [2, 0, 6, 3]$

$c_0 = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} + \omega_4^{0} c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) + 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = \frac{1}{4}(11)$ ✓

$c_1 = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} + \omega_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) + (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 i - f_2 + f_3 i) = \frac{1}{4}(-4 + 3i)$ ✓

$k \geq M = \frac{N}{2} = 2$

$c_2 = c_{2+0} = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} - \omega_4^{0} c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) - 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 + f_2 - f_3) = \frac{1}{4}(5)$ ✓

$c_3 = c_{2+1} = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} - \omega_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) - (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 i - f_2 - f_3 i) = \frac{1}{4}(-4 - 3i)$ ✓

2.9 Fourier-Analysis an der Prüfung

Exam	Even-Odd und Periodizität	Fourier-Reihe	Komplexe Fourier-Reihe	Fourier Integral	Fourier Transform
W 22		Fourierkoeffizienten einer Funktion bestimmen			PDE lösen
S 22	X	Koeffizientvergleich für Wave Equation			Funktion transformieren
W 23	X	Koeffizienten berechnen für Heat Equation, Koeffizientenvergleich für Dirichlet Problem auf einer Kreisscheibe	Wert einer Summe bestimmen		ODE lösen
S 23	X	Wert einer Summe bestimmen, Koeffizienten berechnen für Heat Equation, Koeffizientenvergleich für Wave Equation			Integralgleichung lösen
W 24	X	Koeffizienten berechnen für Heat Equation	Wert einer Summe bestimmen		ODE lösen, PDE lösen
S24	X	Wert einer Summe bestimmen, Koeffizientenvergleich für Wave Equation, Koeffizienten berechnen für Dirichlet auf Rechteck			ODE lösen

3 Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung beschreibt wie die Ableitungen einer unbekannten Funktion sich ändern und wie die Korrelation zu anderen Funktionen und anderen Parametern aussehen. Diese Gleichungen werden normalerweise von der Physik des beobachteten System hergeleitet mit dem Ziel die unbekannte Funktion zu bestimmen.

In Analysis I haben wir gewöhnliche DGL's (ODE's) (ordinary differential equations) behandelt. Bei einer ODE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von einer Variabel (bspw. $y(x)$) und gibt Information zu einer oder mehreren Ableitungen (bspw. $\frac{d^n}{dx^n}y(x)$) möglicherweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von dieser Variabel. ⇝ bspw. $y(x) = f(y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), g(x))$ (müssen hier auch nicht auch unbedingt konstante Koeffiziente sein.) (gegebene Funktion)

In Analysis II schauen wir uns partielle DGL's (PDE's) (partial differential equations) an. Bei einer PDE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von mehreren Variabel (bspw. $u(x,y)$) Folglich beschreibt die PDE das Verhalten einer oder mehreren partiellen Ableitungen (bspw. $\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,y)$; $\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x,y)$) (müssen hier auch nicht auch unbedingt konstante Koeffiziente sein.) möglicherweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von diesen Variabeln. ⇝ bspw. $u(x,y) = f\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial^n x}; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial^n y}, g(x,y)\right)$ (gegebene Funktion)

Notation

$u \overset{\text{bspw.}}{=} u(x, \dots, t)$ (nur beispielhaft können auch andere Variabeln sein) ; $u_x = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \overset{\text{für eine Ortvariabel}}{=} u'$; $u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \overset{\text{normalerweise für eine Ortvariabel}}{=} u''$, $u_t = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - u_t \overset{\text{normalerweise für Zeitvariabel}}{=} \dot{u}$

3.1 Eigenschaften einer PDE

Eine PDE ist...

↳ $\boxed{\text{linear, falls die gesuchte Funktion und die Ableitungen nur linear in der Gleichung vorkommen}}$

Bsp. 39

Sind diese PDE's linear oder nicht linear?

$u_x + 2u_y + u = x$ ⇒ linear

$u_x = \cos(x) \cdot u$ ⇒ linear

$u_x = \cos(u)$ ⇒ nicht linear

$u_x^2 = u$ ⇒ nicht linear

$u_x + 3u_x \cdot u_y = 0$ ⇒ nicht linear

↳ $\boxed{\text{homogen, falls die Gleichung nur die gesuchte Funktion oder einer der partiellen Ableitungen besitzt und linear ist}}$

Bsp. 40

Sind diese PDE's homogen oder nicht?

$u_x + u_y = 2u$ ⇒ homogen

$u_x + u_y = 2x$ ⇒ nicht homogen

↳ $\boxed{\text{n.te-Ordnung, wobei n die höchste Ableitung der unbekannte Funktion darstellt.}}$

Bsp. 41

Bestimme die Ordnung der PDE's?

$u_{xy} + u_x = u$ ⇒ 2. Ordnung

$u_x + u_y = u$ ⇒ 1. Ordnung

1.MC6 [3 Points] Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(t, x, y)$:

$$u_t u_{xyy} + 4u_{xx} = 4u_{yy} - 3x^2 + y.$$

Is this PDE linear ? Homogeneous? And what is the order of the PDE ?

(A) It is a non linear and homogeneous third order PDE.

(B) It is a linear and homogeneous fourth order PDE.

(C) It is a non linear and non homogeneous fourth order PDE.

Bsp. 42 (D) It is a non linear and non homogeneous third order PDE.

- Is this PDE linear? → non-linear with respect to u due to the $u_t \cdot u_{xyy}$ term
- Is this PDE homogeneous? → not homogeneous with respect u due to $-3x^2+y$ term
  ↳ term not containing u present? Do → not homogeneous
- What is the order of the PDE? The highest derivative is u_{xyy} and therefore the PDE is of order 3

3.2 Klassifizierung von linearen PDE's zweiter Ordnung

Def.

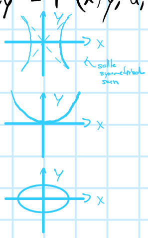
Betrachten wir eine lineare PDE zweiter Ordnung von einer Funktion u(x,y) in der folgenden Form:

$$A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

→ hyperbolisch: $AC - B^2 < 0$

→ parabolisch: $AC - B^2 = 0$

→ elliptisch: $AC - B^2 > 0$



→ mixed type: Da A,B,C Funktionen von den Variablen (x,y) sein können, kann sich der Typ der PDE sich je nach den Werten (x,y) möglicherweise ändern. In diesem Fall ist die PDE mixed type und wir sollten die Klassifizierung für verschiedene Werte / Regionen von (x,y) machen

Bsp. 43 Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + xu = 0$

$$A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

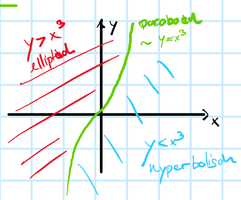
$A = 1 \quad B = 1 \quad C = 1 \qquad A \cdot C - B^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0 \Rightarrow$ parabolisch

Bsp. 44 Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE: $y u_{xx} + 2x^{3/2} u_{xy} + u_{yy} = u_x + u_y + u$

$$A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

$A = y \quad B = x^{3/2} \quad C = 1 \qquad A \cdot C - B^2 = y - x^3 \Rightarrow$ mixed type

$y - x^3 = 0$



Bsp. 45 **1.MC6 [3 Points]** Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(x, y)$:

$$u_{xx} + 2\cos(x) u_{xy} + y u_{yy} - u_x + u_y = \sin(x).$$

Is the PDE hyperbolic, parabolic, elliptic or of mixed type ?

(A) hyperbolic.

(B) parabolic.

(C) elliptic.

(D) mixed type.

- Allgemeine Form: $A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

  $1 \cdot u_{xx} + 2 \cdot \cos(x) u_{xy} + y \cdot u_{yy} = u_x + u_y + \sin(x)$

⇒ $A = 1$; $B = \cos(x)$; $C = y$

→ $AC - B^2 = y - \cos(x)^2$ ⇝ sign swap possible ⇒ mixed type

3.3 Lösung der 1D-Wellengleichung

Def. $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, mit $u(t,x)$, welche die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t beschreibt.

c: Konstante ⇒ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Die Wellengleichung ist eine hyperbolische, lineare PDE 2. Ordnung.

Randbedingung (Boundary Conditions)

Randbedingungen geben uns Informationen an gewissen Stellen (Rand) zu allen Zeiten. Beispielsweise $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$

In diesem Fall wäre die Welle an beiden Enden ($x=0$ und $x=L$) fest eingespannt unabhängig von der Zeit.

Anfangsbedingung (Initial Conditions)

Anfangbedingungen geben uns Informationen über die Ausgangsposition oder Ausgangsgeschwindigkeit der Wellenfunktion zu einer gewissen Zeit ($t=0$). Beispielsweise $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \,|\; 0 \le x \le L \\ u_t(x,0)=g(x) \,|\; 0 \le x \le L \end{cases}$

In diesem Fall hätte die Welle zu Beginn eine Form $f(x)$ mit einer Geschwindigkeit $g(x)$.

Aufgabenstellung: Wir suchen eine Funktion $u(x,t)$, welche die Wellengleichung ($u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$), welche die Randbedingung und Ausgangsbedingung ($\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$) und ($\begin{cases} u(x,0)=f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0)=g(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$)

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \cdot G) = F \frac{\partial^2}{\partial t^2} G = F \ddot{G}$$

↑ F(x) wie eine konstante Faktor bzgl. t

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F \cdot G) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = F'' G$$

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F \ddot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F: $\dfrac{\ddot{G}}{c^2 G} = \dfrac{F''}{F} = k$

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesem Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

Bsp. 46

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 k G \end{cases} \Rightarrow \text{Dass sind jetzt zwei ODE's}$$

23.5 Homogene DGL 2.Ordnung

- $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$

1. Setze $y = e^{\lambda x}$
2. $\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow$ char. Polynom
3. Löse das char. Polynom:
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \; (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Rightarrow y = C_1 e^{cx} + C_2 x e^{cx} (c \in \mathbb{R})$
   C) $\lambda_{1,2} = d \pm i\omega \rightarrow$ komplex konjugiert
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\right)$
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right)$
4. Falls kein Störterm vorhanden ist → Randbedingungen

2 Fallunterscheidung (Many solutions)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0$, $k>0$, $k<0$:

① $k=0$: $F''=0 \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx} = A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x) = A\,x + B$ =

Randbedingung: $F(0) = B = 0 \quad F(L) = A\,L = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

⇝ Temperatur überall null
⇝ interessiert uns nicht

② $k>0$: $F'' - kF = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|} \Rightarrow F(x) = A\,e^{\sqrt{|k|}x} + B\,e^{-\sqrt{|k|}x}$

Randbedingung: $F(0) = A + B = 0 \quad A = -B \quad F(L) = A\left(e^{\sqrt{|k|}L} - e^{-\sqrt{|k|}L}\right) = 2A \sinh(\sqrt{|k|}L) = 0 \;\forall k>0 \Rightarrow A = 0$

$F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

③ $k<0$: $F'' + |k|F = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|}\,i \Rightarrow F(x) = A\cos(\sqrt{|k|}x) + B\sin(\sqrt{|k|}x)$

Randbedingung: $F(0) = A = 0 \qquad F(L) = B\sin(\sqrt{|k|}L) = 0 \;\forall k<0$

$\Rightarrow B = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

$\Rightarrow$ oder $\sqrt{|k|}L = n\pi \overset{k<0}{\Rightarrow} k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Eingesetzt in die $\ddot{G} = c^2 kG$, welche von t abhängt, erhalten wir:

$\ddot{G} + c^2\left(\frac{c n}{L}\right)^2 G = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten $\lambda^2 + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad \lambda = \pm\frac{cn\pi}{L}i \Rightarrow G_n(t) = C_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$

Für die Konstanten verwenden wir Index n, um zu verdeutlichen, dass je nach n möglicherweise unterschiedliche n.

$u_n(x,t) = \left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$

Hier sind B_n und B_n^* die Kombinationen der Konstanten aus F und G. Wir haben $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$ definiert.

3 Zusammensetzung der Lösung mit der Fourier Reihe

Bsp. 46

Wir haben eine bzw. unendliche Lösungen, welche die Wellengleichung und ihre Randbedingungen erfüllen, mit unterschiedlichen Frequenzen λ_n. Jedoch erfüllen diese Lösungen meistens die Anfangsbedingungen nicht. Um dieses Problem zu lösen, können wir die Linearität der PDE zu nutze machen und die Lösung als Superposition aller darstellen.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Anfangsbedingungen: • $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer 2L periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also f(x) ungerade, 2L-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

• $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\lambda_n B_n\sin(\lambda_n t) + B_n^*\lambda_n\cos(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n B_n^*\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer 2L periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also f(x) ungerade, 2L-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

• Es ist 'wichtig', dass ihr die Herleitung versteht. So könnt ihr verstehen wie die generelle Lösungen von PDE's konstruiert werden (und möglicherweise musst ihr eine ähnliche 'Herleitung' in der Prüfung machen)

Kochrezept - Separation der Variabeln:

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen abhängig von F und G

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F und setzen es gleich einer Konstante (bspw. k)

⑤ Wir lösen die ODE, welche die einfacheren Randbedingungen (Anfangsbedingungen) hat, für die Fälle $k=0$, $k>0$, $k<0$

⑤.1 Mit den Randbedingungen bestimmen wir die Konstanten (z.B A, B)

⑥ wir sollten für bestimmte "k"'s eine (nicht-triviale) Lösung für die erste ODE finden

⑦ Wir setzen diese k's in die zweite ODE ein und lösen die ODE für diesen konkreten Fall

⑧ Falls wir noch eine einfache Randbedingung haben, können wir möglicherweise die Lösung der zweiten ODE vereinfachen

⑨ wir können u_n nun bestimmen mit der Annahme: $u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$

⑩ Wir können die Lösungen u_n superponieren durch eine Fourier-Reihe /(Fourier-Integral) (unendliche Stange) um eine nicht konstante Anfangsbedingung oder Randbedingung zu erfüllen.

⑪ Die Koeffizienten in der Fourier-Reihe lassen sich dann auch mit der entsprechenden Formeln berechnen.

- Die Gleichungen, die wir in Bsp. 1 bestimmt haben, können als generelle Lösung für die Wellengleichung verwendet, falls sie die gleichen Randbedingungen besitzen.

Def.

Für eine 1D-Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen $x\in[0,L]$: $\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos(\lambda_n t)+B_n^*\sin(\lambda_n t))\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{c\pi n}{L}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$ $\quad B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

Bsp. 47

3.Q1 [10 Points] Wave equation

Find the solution $u = u(x,t)$ of the 1-dimensional wave equation on the interval $[0, L]$ with the constant $c > 0$ and the following boundary and initial conditions:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0\le x\le L, t\ge 0,\\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t\ge 0,\\ u(x,0) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right), & 0\le x\le L,\\ u_t(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), & 0\le x\le L.\end{cases}$$

You can use the general formula directly to obtain the solution. For this exercise, no points will be given for detailing all the steps of the separation of variable .

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0\\ u(x,0) = f(x)\\ u_t(x,0) = g(x)\end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3) wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4) wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

- $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$
- $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \boxed{4}\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) \Rightarrow \begin{cases} B_n = 4 & \text{falls } n=5,\\ B_n = 0 & \text{sonst}\end{cases}$
- $u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\frac{cn\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$

  $\Rightarrow \begin{cases} B_n^* = \frac{1}{\frac{cn\pi}{L}} = \frac{L}{cn\pi} = \frac{L}{2c\pi} & \text{falls } n=2,\\ B_n^* = 0 & \text{sonst}\end{cases}$
- $u(x,t) = \frac{L}{2c\pi}\sin\left(\frac{2c\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + 4\cos\left(\frac{5c\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$

Prüfungsaufgabe Winter 2019

3. Inhomogeneous Wave Equation (*14 Points*)
Find the solution of the following wave equation (with inhomogeneous boundary conditions) on the interval $[0, \pi]$:

$$u = u(x,t) \text{ such that } \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 3, & t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 5, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x^2 + \frac{1}{\pi}(2-\pi^2)x + 3, & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = 0. & x \in [0,\pi] \end{cases} \quad (3)$$

You must proceed as follows.

a) (*2 Points*) Find the unique function $w = w(x)$ with $w'' = 0$, $w(0) = 3$, and $w(\pi) = 5$.

b) (*4 Points*) Define $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$. Formulate the corresponding problem for v, equivalent to (3).

c) (*8 Points*)

(i) Find, using the formula from the script, the solution $v(x,t)$ of the problem you have just formulated.

(ii) Write down explicitly the solution $u(x,t)$ of the original problem (3).

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (1)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (4)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (5)$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (6)$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3) wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4) wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

ODE ändert sich nicht da zweite Ableitung gleich null und nicht von t abhängig ist → erhalten homogene Randbedingungen

a) $w'' = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} w' = a \overset{\int dx}{\Rightarrow} w = ax + b \quad w(0) = b = 3 \quad w(\pi) = a\pi + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi} \quad \underline{\underline{w(x) = \frac{2}{\pi}x + 3}}$

Bsp. 48

b) $v(0,t) = u(0,t) - w(0) = 3 - 3 = 0\ ;\ v(\pi,t) = u(\pi,t) - w(\pi) = 5 - 5 = 0$

$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = x^2 + \frac{1}{\pi}(\cancel{2} - \pi^2)x + \cancel{3} - \left(\cancel{\frac{2}{\pi}x} + \cancel{3}\right) = x^2 - \pi x \qquad v_t(x,0) = u_t(x,0) - \frac{\partial}{\partial t}\cancel{w(x)} = 0$

$$v = v(x,t) \text{ such that } \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & t \geq 0,\ x \in [0,\pi] \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x,0) = x^2 - \pi x & x \in [0,\pi] \\ v_t(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Indefinite Integrals (you may use): $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

1)	$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{\cos(nx) + nx\sin(nx)}{n^2}$	(+ constant)
2)	$\int x^2\cos(nx)\,dx = \frac{(n^2x^2-2)\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3}$	(+ constant)
3)	$\int x\sin(nx)\,dx = \frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$	(+ constant)
4)	$\int x^2\sin(nx)\,dx = \frac{(2-n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}$	(+ constant)
5)	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$	(+ constant)

c) i) $v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(B_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n^* \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(cnt) + B_n^* \sin(cnt)\right) \sin(nx)$

$v_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0$

$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x^2 - \pi x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin(nx)\,dx - 2\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(2-n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}\right]_0^\pi - 2\left[\frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(2-n^2\pi^2)(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right) - 2\left(\frac{-n\pi(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{\left(4 - \cancel{2n^2\pi^2} + \cancel{2n^2\pi^2}\right)(-1)^n - 4}{n\pi^3} = \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$

$= \begin{cases} 0 & n = 2j \\ -\frac{8}{\pi n^3} & n = 2j+1 \end{cases}$

$v(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \cos(cnt) \cdot \sin(nx) = \underline{\underline{\frac{-8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^3} \cos(c(2j+1)t) \sin((2j+1)x)}}$

ii) $u(x,t) = v(x,t) + w(x) = \underline{\underline{\frac{-8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^3} \cos(c(2j+1)t)\sin((2j+1)x) + \frac{2}{\pi}x + 3}}$

3.4 D'Alembert-Lösung

Für die 1D Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ gegeben mit folgender Koordinatentransformationen: $v = x + ct$ und $w = x - ct$

Die Lösung, welche wir erhalten haben, wird auch (allgemeine) D'Alembert Lösung genannt:

Def $\boxed{u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)}$

Falls man zusätzlich zwei Anfangswertbedingungen berücksichtigt, erhält man das Cauchy Problem und der dazugehörigen D'Alembert Lösung

Def.

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{(Cauchy Problem)}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d(s)$$

Wir haben hier keine Randbedingung. Das heisst die Welle kann sich also bei dieser Lösung sozusagen "frei" im Raum bewegen.

Sei $u(x,t)$ die Lösung von der eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bsp. 49 a) Finden Sie $u(0, \frac{1}{2})$ mit der d'Alembertsche Formel

b) Finden Sie $\lim_{t \to \infty} u(x,t)$

a) Formel: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds}$

$$u(0, \tfrac{1}{2}) \underset{c=1}{=} \frac{1}{2}\left[f(\tfrac{1}{2}) + f(-\tfrac{1}{2})\right] + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{g(s)}_{=1 \text{ im Intervall } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 1 + 1\right] = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\left[0 + 0\right] + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\, ds = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Bsp. 50

1.MC7 [3 Points] Wave equation with D'Alembert solution.

Consider the following wave equation:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = e^{2x}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Find the value of the solution u at position $x = 0$, i.e. $u(0,t)$

(A) $u(0,t) = \cos(2ct)$.

(B) $u(0,t) = \sin(2ct)$.

(C) $u(0,t) = \sinh(2ct)$.

(D) $u(0,t) = \cosh(2ct)$.

Formel:

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d(s)$$

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\left[f(0+ct) + f(0-ct)\right] + \frac{1}{2\cdot c}\cdot\int_{0-ct}^{0+ct} g(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(ct) + f(-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} 0\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2ct} + e^{-2ct}\right] = \underline{\underline{\cosh(2ct)}}$$

1.MC7 [3 Points] Wave equation with D'Alembert solution.

Consider the following wave equation with $c = 1$,

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 4x^2 - 2, & x \in (0,2), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \text{and} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,2), \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

Find the solution at position $x = 1$ and time $t = 10$, i.e. $u(1,10)$.

Bsp.51

(A) $u(1,10) = \frac{1030}{3}$.
(B) $u(1,10) = \frac{2060}{3}$.
(C) $u(1,10) = \frac{2}{3}$.
(D) $u(1,10) = \frac{4}{3}$.

Formel:

$$\boxed{\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d(s)}$$

$$u(1,10) = \frac{1}{2}\left[f(1+1\cdot 10) + f(1-10)\right] + \frac{1}{2\cdot 1}\cdot\int_{1-1\cdot 10}^{1+1\cdot 10} g(s)\, ds$$
$$= \frac{1}{2}\left[f(11) + f(-9)\right] + \frac{1}{2}\int_{-9}^{11} g(s)\, ds$$
$$= \frac{1}{2}\left[0 + 0\right] + \frac{1}{2}\int_0^2 s^2\, ds = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\, s^3 \Big|_0^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Prüfungsaufgabe Winter 2015

5. Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t = 0$ horizontal um

$$u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right)$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren Sie das Problem mathematisch.

b) Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems.

c) Berechnen Sie nun $\lim_{t\to\infty} u(2,t)$.

a) unendliche Saite $\Rightarrow$ keine Randbedingung

Initial Conditions: • $u(x,0) = f(x) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right)$

• $u_t(x,0) = g(x) = 0$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Cauchy Problem: D'Alembert anwenden}$$

b) Formel: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds}$

Bsp.52

$$u(x,t) \overset{c=1}{=} \frac{1}{2}\left[f(x+t) + f(x-t)\right] + \cancel{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \underbrace{g(s)}_{0}\, ds}^{\,0} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+e^{x+t}}{1+e^{-x-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{x-t}}{1+e^{-x+t}}\right)\right]$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2+e^{x+t}}{1+e^{-x-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{x-t}}{1+e^{-x+t}}\right)\right]}}$$

c) $$\lim_{t\to\infty} u(2,t) = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(\ln\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}}\right) + \ln\left(\frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\left(\frac{2+e^{2+t}}{1+e^{-2-t}}\right)\cdot\left(\frac{2+e^{2-t}}{1+e^{-2+t}}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{4+2e^{2+t}+2e^{-2-t}+e^4}{1+e^{-2+t}+e^{-2-t}+e^{-4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\cancel{4e^{-t}}+2e^2+\cancel{2e^{2-t}}+\cancel{e^{4-t}}}{\cancel{e^{-t}}+e^{-2}+\cancel{e^{-2-2t}}+\cancel{e^{-4-t}}}\right) = \frac{1}{2}\ln(2e^4) = \frac{1}{2}(\ln(2)+\ln(e^4)) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln(2)+4)}}$$

3.5 Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung beschreibt eine Temperaturverteilung $u(x,t)$ eines Stabs der Länge L, welcher entlang der x-Achse ausgerichtet ist

Def.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 & \Rightarrow \text{Randbedingungen} \\ u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L & \Rightarrow \text{Anfangswertbedingungen} \end{cases}$$

mit $c^2 = \frac{\kappa}{\sigma \rho}$

↳ mehr hierzu in Thermo III und in WuF

c: Temperaturleitfähigkeit
κ: Thermische Leitfähigkeit
σ: spezifische Wärmekapazität
ρ: Dichte des Stabs

Annahmen:
- Wärme fliesst nur in x-Richtung
- $T = 0$ bei $x = 0$ und $x = L$
- Anfangsbedingungen durch $f(x)$ beschrieben

Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

Gleiches Vorgehen wie bei Wellengleichung mit Separation der Variabele

1) Separation der Variabeln
2) Fallunterscheidung
3) Superposition der Lösung → Fourier-Reihe

Bsp. 53

Finde $u(x,t)$, so dass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ gilt.

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$\dot{G} \Leftrightarrow \ddot{G}$
Wärme PDE $\Leftrightarrow$ Wellen PDE

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}(F \cdot G) = F \frac{\partial}{\partial t} G = F \dot{G}$$

↑ F(x) wie eine konstante Faktor bzgl. t

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F \cdot G) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = F'' G$$

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F \dot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F: $\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesen Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = c^2 k G \end{cases} \Rightarrow \text{Dass sind jetzt zwei ODE's}$$

2 Fallunterscheidung (Many Solutions)

∼ kein Unterschied zur Wellengleichung F(x)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0$, $k>0$, $k<0$:

① $k = 0$: $F'' = 0 \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx} = A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x) = Ax + B$

Randbedingung: $F(0) = B = 0 \quad F(L) = AL = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

∼ Temperatur überall null ∼ interessiert uns nicht

② $k > 0$: $F'' - kF = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{k} \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}$

Randbedingung: $F(0) = A + B = 0 \quad A = -B \quad F(L) = A(e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L}) = 2A \sinh(\sqrt{k}L) = 0 \ \forall k > 0 \Rightarrow A = 0$

$F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

③ $k < 0$: $F'' + |k| F = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|}\, i \Rightarrow F(x) = A \cos(\sqrt{|k|}x) + B \sin$

Randbedingung: $F(0) = A = 0 \qquad F(L) = B \sin(\sqrt{|k|}L) = 0 \ \forall k < 0$

$\Rightarrow B = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

$\Rightarrow$ oder $\sqrt{|k|}L = n\pi \overset{k<0}{\Rightarrow} k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Eingesetzt in die $\dot{G} = c^2 k G$, welche von t abhängt, erhalten wir:

$\dot{G} + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten $\lambda + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad \lambda = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow G_n(t) = C_n\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$

~ konnten es jetzt auch einfach integrieren

Für die Konstanten verwenden wir Index n, um zu verdeutlichen, dass je nach n möglicherweise wir unterschiedliche Lösungen erhalten

$u_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(t) = B_n\, e^{-\lambda_n^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$

Hier sind B_n und B_n^* die Kombinationen der Konstanten aus F und G. Wir haben $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$ definiert.

3 Zusammensetzung der Lösung mit der Fourier Reihe

Bsp. 53

Wir haben eine bzw. unendliche Lösungen, welche die Wärmegleichung und ihre Randbedingungen erfüllen, mit unterschiedlichen Frequenzen λ_n. Jedoch erfüllen diese Lösungen meistens die Anfangsbedingungen nicht. Um dieses Problem zu lösen, können wir die Linearität der PDE zu nutze machen und die Lösung als Superposition aller "Basislösungen" darstellen.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Anfangsbedingungen: $\cdot\; u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ mit $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer $2L$ periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also $f(x)$ ungerade, $2L$-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

~ eine Konstante weniger als bei der Wellengleichung, da "eine Ableitung weniger"
~ eine Anfangsbedingung weniger

- Die Gleichungen, die wir in Bsp. 1 bestimmt haben, können als generelle Lösung für die Wärmegleichung verwendet werden, falls sie die gleichen Randbedingungen besitzen.

Def. Für eine 1D-Wärmegleichung der Form $u_t = c^2 u_{xx}$ und den Anfangs-/Randbedingungen $x \in [0, L]$: $\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{c n\pi}{L}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \qquad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

- Wichtig zu beachten, dass wir bei anderen Randbedingungen auch ein andere allgemeine Lösung erhalten. Eine häufige andere Variante, welche ihr auch auf der Zusammenfassung findet:

Def. Für eine 1D-Wärmegleichung der Form $u_t = c^2 u_{xx}$ und den Anfangs-/Randbedingungen $x \in [0, L]$: $\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n \cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{c n\pi}{L}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \qquad A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx$

Prüfungsaufgabe Winter 2023

2.Q1 [15 Points] **Heat Equation with inhomogeneous boundary conditions**

Find the general solution of the Heat equation (**with inhomogeneous boundary conditions**) for the following problem:

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \le x \le \pi, t \ge 0, \\ u(0,t) = 5, & t \ge 0, \\ u(\pi,t) = 8, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x) + w(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

where w is the function that you have to find in point $a)$ and f is given by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \in [0,\pi), \\ 0 & \text{if} \quad x = \pi. \end{cases}$$

You must proceed as follows.

a) Find the unique function $w = w(x)$ with $w'' = 0$, $w(0) = 5$, and $w(\pi) = 8$.

b) Define $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$. Formulate the corresponding problem for v, equivalent to (1).

c) Find, using the formula from the script, the solution $v(x,t)$ of the problem you have just formulated.

d) Write down explicitly the solution $u(x,t)$ of the original problem (1).

a) $w'' = 0 \overset{\iint dx\,dx}{\Longrightarrow} w(x) = \alpha x + \beta$

$5 = w(0) = \beta \Rightarrow \beta = 5$

$8 = w(\pi) = \alpha\pi + 5 \Rightarrow \alpha = \frac{8-5}{\pi} = \underline{\underline{\frac{3}{\pi}}}$

$w(x) = \frac{3}{\pi}x + 5$

b) $v(0,t) = u(0,t) - w(0) = 5 - 5 = 0$

$v(\pi,t) = u(\pi,t) - w(\pi) = 8 - 8 = 0$

$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = f(x) + w(x) - w(x) = f(x)$

(↳ Wir haben dieses w gewählt, sodass die Randbedingungen homogen werden und, da $w'' = 0$ & $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ sind, ändern wir die PDE ja auch nicht. Wir können das Problem für v definieren als:)

Bsp. 54

$$\begin{cases} v_t = c^2 v_{xx} & 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0 \\ v(0,t) = 0 & t \ge 0 \\ v(\pi,t) = 0 & t \ge 0 \\ v(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

3.6 Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

3.6.1 Vorgehen 1:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbediungungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0,L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

⇒ Manchmal ist B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

Indefinite Integrals: $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 1})$

1) $\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)

2) $\int x^2\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x^2 - 2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)

3) $\int x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)

4) $\int x^2\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{\left(2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x^2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)

5) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$ (+constant)

c) $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2 n^2 t} \sin(nx)$

$f(x) = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$

(B_n sind die Fourierkoeffizienten einer Fortsetzung von f, um eine 2π-periodische, ungerade Funktion zu sein)

↳ $B_n \overset{L=\pi}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(2 - n^2x^2)\cdot\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}\right]_0^\pi$

$= \frac{2}{\pi}\,\frac{(2 - n^2\pi^2)\cdot\cos(n\pi) - 2}{n^3} = \frac{2\cdot(2\cdot(-1)^n - 2)}{\pi n^3} - \frac{2\cancel{n^2}\pi^{\cancel{2}}(-1)^n}{\cancel{\pi} n^{\cancel{3}}} = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} - \frac{2\pi(-1)^n}{n}$

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} - \frac{2\pi(-1)^n}{n}\right)\cdot e^{-c^2\pi^2 t}\sin(nx)$

d) Rücksubstitution:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} - \frac{2\pi(-1)^n}{n}\right)\cdot e^{-c^2\pi^2 t}\sin(nx) + \frac{3}{\pi}x + 5$

3.6 Laplace-Gleichung

Wir können die 1D Wärmegleichung zu beliebigen Dimensionen erweitern mit dem Laplace Operator $\Delta = \nabla^2$

Def. $\boxed{u_t - c^2 \Delta u \text{ mit } 1D: \Delta u = u_{xx} \quad 2D: \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \quad 3D: \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}}$

behandeln wir nicht in diesem Kurs

Wir betrachten oft "steady-state" Situationen, bei welchen die Temperaturverteilung ein Equilibrium erreicht und folglich unabhängig von der Zeit ist $(u \neq u(t))$ Die stationäre Wärmeleitung $(u_t = 0)$ lässt sich zur sogenannten Laplace-Gleichung vereinfachen.

Def. $\boxed{\Delta u = 0}$ Viele physikalische Probleme können mathematisch als Laplace Gleichung aufgefasst werden

Wir definieren eine Region R, auf welcher die Laplace-Gleichung gilt. Beispielsweise könnte diese Region in 3D eine Kugel, in 2D ein Rechteck oder in 1D ein Stab sein.

Um eine spezifische Lösung zu finden, definieren wir Randbedingungen. Wir haben eine Anfangswertbedingungen, da die Gleichung ja zeitunabhängig ist.

Typische Arten von Randbedingungen sind:
- Dirichlet Boundary Conditions: Wir geben vor wie die Funktion u entlang vom Rand aussieht
- Neumann Boundary Conditions: Wir geben vor wie die Ableitungen von u entlang vom Rand aussehen

3.6.1 Dirichlet-Problem auf einem Rechteck

Das Dirichlet-Problem beschreibt eine stationäre Temperaturverteilung einer rechteckigen Platte. Auf drei Seiten der Platte ist die Randtemperatur 0 und entlang der vierten ist sie durch $f(x)$ beschrieben. Mathematisch kann man das festhalten als:

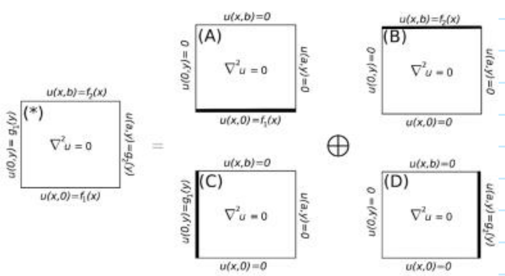
Def.
$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta u = 0 \qquad 0 \leq x \leq a, \; 0 \leq y \leq b \\ &\left.\begin{aligned} &u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \\ &u(x,b) = f(x) \end{aligned}\right\} \text{Randbedingungen} \end{aligned}}$$

Jetzt haben wir aber vllt. nicht die Randbedingung
$$\begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$$
sondern einen generellen Fall.

Fall
$$\begin{cases} u(0,y) = g_1(y) \\ u(a,y) = g_2(y) \\ u(x,0) = f_1(x) \\ u(x,b) = f_2(x) \end{cases}$$

. Um diesen Fall zu lösen, können wir jeweils alle Ränder bis auf ein Rand auf null setzen und dann alle 4 Basisfälle addieren.

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem



Lösung für A:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$C_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^b g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$D_n = \frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^b g_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Lösung für A+B+C+D=(*):

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

Prüfungsaufgabe Winter 2017

5. (6+4 *Points*) Consider the system

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi \\ u(0,y)=0=u(\pi,y), & 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le\pi, \\ u(x,\pi)=3\sin(2x), & 0\le x\le\pi, \end{cases}$$

a) Find the general solution $u(x,t)$ of

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi \\ u(0,y)=0=u(\pi,y), & 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le\pi, \end{cases}$$

via a separation of variables argument (please show the details)

b) Find the solution of

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi \\ u(0,y)=0=u(\pi,y), & 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0, & 0\le x\le\pi, \\ u(x,\pi)=3\sin(2x), & 0\le x\le\pi, \end{cases}$$

a) Separation der Variabeln: $u(x,y)=F(x)\cdot G(y)$

$u_{xx}=F''(x)\cdot G(y) \qquad u_{yy}=F(x)\cdot G''(y)$

Einsetzen in die PDE

$\hookrightarrow F''(x)\cdot G(y)+F(x)\cdot G''(y)=0$

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k$$

Randbedingungen: $u(0,y)=u(\pi,y)=0 \overset{G(y)\neq 0}{\Longrightarrow} F(0)=F(\pi)=0$

$\hookrightarrow \begin{cases} F''=kF \\ F(0)=F(\pi)=0 \end{cases}$

$k=0$: $F''=0 \underset{\text{Konstante Koeffizienten}}{\overset{\text{ODE}}{\Longrightarrow}} F(x)=Ax+B$

Randbedingungen: $F(0)=B=0 \quad F(\pi)=A\pi=0 \Rightarrow A=0$

$\hookrightarrow F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

$k>0$: $F''-kF=0 \underset{\text{konstante Koeffizienten}}{\overset{\text{ODE}}{\Longrightarrow}} F(x)=A\,e^{\sqrt{k}x}+B\,e^{-\sqrt{k}x}$

Randbedingungen: $F(0)=A+B=0 \quad A=-B \quad F(\pi)=A\left(e^{\sqrt{k}\pi}-e^{-\sqrt{k}\pi}\right)=2A\sinh(\sqrt{k}\pi)=0$

$\hookrightarrow A=0=-B \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

$k<0$: $F''+|k|F=0 \underset{\text{konstante Koeffizienten}}{\overset{\text{ODE}}{\Longrightarrow}} F(x)=A\cos(\sqrt{|k|}x)+B\sin(\sqrt{|k|}x)=0$

Bsp. 55

Randbedingungen: $F(0)=A=0 \quad F(\pi)=B\sin(\sqrt{|k|}\pi)=0$

$\hookrightarrow B=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

$\hookrightarrow \sin(\sqrt{|k|}\pi)=0 \quad \sqrt{|k|}\cancel{\pi}=n\cancel{\pi} \Rightarrow k\overset{k<0}{=}-n^2$

$\Rightarrow F_n=A_n\sin(nx)$

Zweite ODE: $\begin{cases} G''-\overset{-k}{n^2}G=0 \\ G(0)=0 \end{cases} \underset{\text{konstante Koeffizienten}}{\overset{\text{ODE}}{\Longrightarrow}} G_n(y)=C_n e^{ny}+D_n e^{-ny}$

Randbedingung: $G(0)=C_n+D_n=0$, $C_n=-D_n \Rightarrow G_n(y)=C_n(e^{ny}-e^{-ny})=2C_n\sinh(ny)=C_n^*\sinh(ny)$

$u_n=F_n(x)\cdot G_n(y)=A_n\sin(nx)\cdot C_n^*\sinh(ny):=B_n\sin(nx)\cdot\sinh(ny)$

Superpositionprinzip $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx)\cdot\sinh(ny)$

b) $u(x,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx)\cdot\sinh(n\pi)=3\sin(2x)$

$=B_1\sin(x)\sinh(\pi)+B_2\sin(2x)\sinh(2\pi)+\ldots=3\sin(2x)$ Koeffizientenvergleich

$B_2=\dfrac{3}{\sinh(2\pi)}$, $B_n=0$ sonst,

$$u(x,y)=\frac{3}{\sinh(2\pi)}\sin(2x)\cdot\sinh(2y)$$

3.7 1D Wärmeleitungsgleichung von einer unendlichen Stange

Wir schauen uns jetzt an, wie man die Temperaturverteilung entlang einer unendlich langer, eindimensionaler Stange bestimmt. Wir beobachten die Wärmeleitungsgleichung auf ganz $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass wir keine Randbedingungen haben. Wir haben nur eine Anfangswertbedingung. wie D'Alembert für Wellengleichung
Mathematisch können wir es auffassen als:

Def. $\boxed{\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}}$

Wir können dieses Problem durch folgende zwei Ansätze lösen
1. Fourier Integral
2. Fourier Transform

Wir erhalten mit beiden Methoden folgende Lösung:

Def. $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-\left(\frac{(x-v)}{2c\sqrt{t}}\right)^2} dv}$$

3.7.1 Fourier Integral Lösung

Durch Separation erhalten wir die generelle Form:

Def.
$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p)\cos(px) + B(p)\cdot\sin(px)]\cdot e^{-c^2p^2t}\, dp$$
$$u(x,0) = \int_0^\infty [A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]\, dp = f(x)$$
mit
$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\, dv$$
$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\, dv$$

Bsp. 56

Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung: $u_t = c^2 u_{xx}$ unter der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ in Form eines Fourier Integrals.

Formel: $u(x,t) = \int_0^\infty [A(p)\cos(px) + B(p)\cdot\sin(px)]\cdot e^{-c^2p^2t}\, dp$

① Berechne $A(p)$ und $B(p)$:

- Schaue ob $f(x)$ gerade / ungerade: $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist gerade.

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\, dx \overset{f(x)=0 \text{ für } |x|\geq 1}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v\cdot\cos(pv)\, dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 v\cdot\cos(pv)\, dv =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{v}{p}\sin(pv)\Big|_0^1 - \frac{1}{p}\int_0^1 \sin(pv)\, dv\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{p}\sin(p) + \frac{1}{p^2}\cos(pv)\Big|_0^1\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{p}\sin(p) + \frac{1}{p^2}\cos(p) - \frac{1}{p^2}\right]$$

$B(p) = 0$, da $f(v)$ gerade

② Superposition

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p)\cos(px) + \cancel{B(p)}^{0}\cdot\sin(px)]\cdot e^{-c^2p^2t}\, dp = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{p}\sin(p) + \frac{1}{p^2}\cos(p) - \frac{1}{p^2}\right]\cdot\cos(px)\cdot e^{-c^2p^2t}\, dp$$

3.7.2 Fourier Transform Lösung

Die Fourier Transformation der Lösung ist gegeben durch:

Def. $\boxed{\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cdot e^{-c^2\omega^2 t} \quad u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}\}(x)}$

Wichtig: Die Fourier Transformation ist in diesem Kontext immer in Bezug auf x.

Eigenschaften der Fourier Transformation

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x-shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ia\omega} \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t-shifting, aber ohne Heaviside
- ω-shift: $\underbrace{\mathcal{F}(\omega - a)}_{\hat{f}(\omega-a)} = \mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\}$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}$ } ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -i \mathcal{F}\{x \cdot f(x)\}(\omega)$ } ähnlich wie bei Laplace nicht.
  wird noch auf ZF ergänzt
- Faltung (Convolutions): $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ } auch ähnlich wie bei Laplace aber $\sqrt{2\pi}$-Term

Prüfungsaufgabe Winter 2024

3.Q1 [10 Points] PDE with Fourier transform

Solve the following partial differential equation on an infinite bar:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \frac{1}{2}u_{xx}(x,t) + u(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

via the Fourier transform with respect to x. You must simplify your solution as much as possible, no unsolved integrals.

Hints: You can proceed as follow:

- First, transform the partial differential equation into a differential equation in time t using the Fourier transform. Use that, for $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{-i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

- Solve the solution of this ODE.
- Finally, take the inverse Fourier transform to find the solution $u(x,t)$. Use that, for $b > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-b\omega^2}\right)(x) = \frac{1}{(2b)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4b}}.$$

Eigenschaften:

1. $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathfrak{F}(f) + \beta\mathfrak{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' (bzw. f'') absolut integrabel, so gilt:
$$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$
3. Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrabel, so ist
$$\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$$
$$\mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f \cdot g)$$
4. Weitere nützliche Transformationen:
$$\mathfrak{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega, t)$$
$$\mathfrak{F}(t^2 u_x) = t^2 \mathfrak{F}(u_x)$$
$$\mathfrak{F}(x \cdot y(x))(\omega) = i\mathfrak{F}'(y(x))(\omega)$$
$$\mathfrak{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{-i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)}$$
$$\mathfrak{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-b\omega^2}\right) = \frac{x}{(2b)^{3/2}} e^{\left(-\frac{x^2}{4b}\right)}$$

x-Shift
$$\mathfrak{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega}\mathfrak{F}(f(x)) = e^{-ia\omega}\mathfrak{F}(\omega)$$
ω-Shift
$$\mathfrak{F}(\omega - a) = \mathfrak{F}\left(e^{iax} f(x)\right)$$

Bsp. 57

- Fourier Transformation der PDE bestimmen:
  - $\mathcal{F}(u_t(x,t)) = \mathcal{F}(\frac{1}{2} u_{xx}(x,t)) + \mathcal{F}(u(x,t))$

    $\hat{u}_t(\omega,t) = -\frac{1}{2}\omega^2 \hat{u}(\omega,t) + \hat{u}(\omega,t)$
  - $\mathcal{F}(u(x,0)) = \hat{u}(\omega,0) = \mathcal{F}(x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}) = \frac{-i\omega}{(\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}})^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{\cancel{2}\cancel{4}\cdot\frac{1}{2}}} = -i\omega \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t = -\frac{1}{2}\omega^2 \hat{u} + \hat{u} \\ \hat{u}(\omega,0) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \end{cases}$ (ODE für $\hat{u}$ in Bezug auf t)

- ODE lösen

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\omega^2 + 1\right)\hat{u}$$
$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = \left(-\frac{1}{2}\omega^2 + 1\right) dt \quad \Big| \int$$
$$\ln \hat{u} = \left(-\frac{1}{2}\omega^2 + 1\right)t + D(\omega)$$
$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega) \cdot e^{(-\frac{1}{2}\omega^2+1)t}$$
$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$
$$\hat{u}(\omega,t) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \cdot e^{(-\frac{1}{2}\omega^2+1)t} = -i\omega e^{-\frac{1}{2}\omega^2(1+t)} \cdot e^t$$

- Die Inverse Fourier Transformation bestimmen:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\omega,t)\} = \mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-\frac{1}{2}\omega^2(1+t)} \cdot e^t\right) = e^t \mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega \cdot e^{-\frac{(1+t)}{2}\omega^2}\right)$$
$$= e^t \cdot \frac{1}{\left(\cancel{2} \cdot \frac{1+t}{\cancel{2}}\right)^{3/2}} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cancel{4}\cdot\frac{1+t}{2}}} = \boxed{\frac{e^t}{(1+t)^{3/2}} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2(1+t)}}}$$

Wir können PDE's lösen, indem wir die gesamte PDE inklusive der Anfangsbedingung Fourier transformieren. In der Frequenzdomäne erhalten wir eine ODE, welcher wir mit Analysis I lösen können. Die Konstante lässt sich mit der Anfangsbedingung bestimmen und durch eine Invers Transformation erhalten wir die gesuchte Funktion.

3.8 Dirichlet-Problem auf symmetrischen Gebiet

Wir wollen die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe lösen anstatt auf dem Rechteck. Hierzu verwenden wir Polarkoordinaten.

Def.
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Das Dirichlet Problem wird in Polarkoordinaten wie folgt, umgeschrieben:

Def. Kartesische Koordinaten

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{auf } \{(x,y)\}, \text{ so dass } x^2+y^2 < R\} \\ u = f & \text{auf } \{(x,y), \text{ so dass } x^2+y^2 = R\} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_r\frac{1}{r} = 0 & \text{auf } \{(r,\theta), \text{ so dass } 0 \le r < R \ 0 \le \theta < 2\pi\} \\ u(R,\theta) = f(\theta) & \text{auf } \{(R,\theta), \text{ so dass } 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

Die Lösung dieser PDE lässt sich auch mit Separation der Variabeln herleiten.

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u(R,\theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

Def.

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

- Für die Koeffizienten gilt: $u(R,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$ ~ Koeffizientenvergleich
- Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi \qquad A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\cos(n\phi)\,d\phi \qquad B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi$$

$\to$ Poisson-Integral-Form: $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)\,f(\phi)\,d\phi$ mit $K(r,\theta,R,\varphi) = \overbrace{\frac{R^2-r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\phi) + r^2}}^{\text{Poisson-Integral-Kernel}}$

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u_r(R,\theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

Def.

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$$

- Für die Koeffizienten gilt: $u_r(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1} n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$ ~ Koeffizientenvergleich
- Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:

A_0 nicht näher bestimmbar $\qquad A_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\cos(n\phi)\,d\phi \qquad B_n = \frac{1}{nR^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi$

Bsp. 58

Bestimme die Lösung der Laplacegleichung einer Einheitskreisscheibe, wobei auf dem Rand gilt: $u_r(1,\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$

Formel: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$

$$u_r(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\cancel{1^{n-1}}\,(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$$

Koeffizientenvergleich: $u_r(1,\theta) = \cancel{A_1}\cos(\theta) + \cancel{B_1}\sin(\theta) + 2\underbrace{A_2}_{1/2}\cos(2\theta) + 2\cancel{B_2}\sin(2\theta) + 3\cancel{A_3}\cos(3\theta) + 3\underbrace{B_3}_{1}\sin(3\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$

$$A_n = \begin{cases} c & n=0 \quad c\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & n=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} 1 & n=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(r,\theta) = \frac{r^2}{2}\cos(2\theta) + r^3\sin(3\theta) + c$$

Bestimme die zeitlich konstante Lösung u der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung ($u_t = 0$) auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 16\}$, wobei die Temperatur auf dem Rand durch $u(x,y) = x \cdot y$ gegeben ist.

Da die Lösung zeitlich konstant ist, gilt: $u_t = 0$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } D \\ u(x,y) = xy & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

Bsp. 59

① In Polarkoordinaten aufschreiben:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r = 0 & \text{auf } \{(r,\theta) : 0 \le r < 4,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \\ u(4,\theta) = 16 \cos\theta \sin\theta & \text{auf } \{(R,\theta) : 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

② Koeffizienten berechnen: • Allg. Lösung: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cdot \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$

• Randbedingung: $u(4,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) = 16 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \overset{\text{trig. Identität}}{=} 8 \sin(2\theta)$

• Koeffizientenvergleich: $u(4,\theta) = \cancel{\ldots} + 4^2\, B_2 \sin(2\theta) + \cancel{\ldots} = 8 \sin(2\theta) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}$

$A_n = 0 \qquad B_n = \begin{cases} 1/2 & n=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Einsetzen in allgemeine Formel: $u(r,\theta) = r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\theta)$

3.9 Harmonische Funktionen

Def. Die Funktionen, die die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, werden harmonische Funktionen genannt. Für alle harmonischen gelten wichtige Eigenschaften: → Ohne die allgemeine Lösung zu kennen, kann man bereits Aussagen über spezielle Werte der Lösungsfunktionen machen → Maximumsprinzip & Mittelwertsatz

3.9.1 Maximumsprinzip

Def. Für harmonische Funktionen gilt:

Skizze:

→ Maximum & Minimum befinden sich immer auf dem Rand ∂S

→ D.h. im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktionen nie ihr Minimum oder Maximum an, ausser sie ist konstant.

Bsp. 60

1.MC8 [3 Points] Let $u = u(x,y)$ be a harmonic function in D_2 the disk of radius 2 centred at 0. The maximum value of u is at $(x,y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, i.e. $\max_{D_2} u(x,y) = u(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Which of the following statements is true?

(A) u is not constant in D_2.

(B) u is constant in D_2.

(C) There exists another point (x', y') in D_2 such that $u(x,y) = u(x', y')$.

(D) We cannot conclude that (A), (B) and (C) are true for every u.

Für harmonische Funktionen gilt:

Skizze:

→ Maximum & Minimum befinden sich immer auf dem Rand ∂S

→ D.h. im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktionen nie ihr Minimum oder Maximum an, ausser sie ist konstant.

→ Maximum does lay on the boundary of D_2 hence we can't conclude anything about u.

1.MC8 [3 Points] Let $u(x,y) = e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}$. The maximum value of u in the disk of radius 4 centred at 0, denoted by D_4, is at the point $(x,y) = (1,1)$. That is

$$\max_{D_4} u(x,y) = u(1,1).$$

Which of the following statements is true?

(A) u is not constant in D_4.

(B) u is constant in D_4.

(C) The minimum of u is at the point $(x,y) = (-1,-1)$

(D) We cannot conclude that (A), (B) and (C) are true.

Bsp. 61

$\Rightarrow u(x,y) = e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}$ $\rightsquigarrow$ maximum at $(1,1)$ and decrease with increasing $|x|$ or $|y|$.

$\hookrightarrow$ u is not constant in D_4 and the minimum is the border of the disk.

u would be constant if $u_{xx} + u_{yy} = 0$ or in other words if u is harmonic, but:

$u_{xx} = -((x-1)^2+(y-1))^2)\,2\,(x-1)\, e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}$

$u_{yy} = -((x-1)^2+(y-1))^2)\,2\,(y-1)\, e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}$

$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy} = -((x-1)^2+(y-1))^2)\,2\, e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}\,(x+y-2) \neq 0$

3.9.2 Mittelwertssatz

Sei u eine harmonische Funktion auf den Gebiet S. Sei (x_0,y_0) ein beliebiger Punkt im Gebiet in S und sei $a \in \mathbb{R}$ der Radius einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt welcher komplett in S enthalten ist: Skizze:

$\Rightarrow$ Dann ist u auch eine Lösung des Dirichlet-Problem (Kreisscheibe)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \{(r,\theta): 0 \le r < a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \\ u = u(a,\theta) & \text{auf } \{(r,\theta): r = a,\ 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die Lösung u können wir mit dem Poisson-Integral bestimmen: $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,a,\varphi)\, u(a,\varphi)\, d\varphi$

Wenn wir jetzt den Wert von u an der Stelle (x_0,y_0) berechnen wollen, können wir (x_0,y_0) in Polarkoordinaten darstellen.

Hierbei wird $r=0$ und θ kann beliebig gewählt werden. Wenn wir dies nun ins Poisson-Integral einsetzen, kriegen wir:

$$u(x_0,y_0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(0,\theta,a,\varphi)\, u(a,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - 0^2}{a^2 - 2\cdot 0\cdot a\cdot\cos(\theta-\varphi) + 0^2}\cdot u(a,\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\, d\varphi$$

Def.

Eine harmonische Funktionen ist an jeden beliebigen Punkt (x_0,y_0) gleich den Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Punkt

$$u(x_0,y_0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + a\cos\varphi,\ y_0 + a\sin\varphi)\, d\varphi$$

Skizze

$u(x_0,y_0)$ = Mittelwert von allen Punkten auf diesem Kreis

3.10 Well/Ill-posed Problems

- Für ODE's kann man die Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen eines Anfangswertproblems, sowie die Abhängigkeit der Anfangsbedingungen beweisen
- Für PDE's geht das in der Regel nicht einfach. Wir unterscheiden zwischen well-posed und ill-posed

Def.

well-posed: 1) Existenz: Das Problem hat eine Lösung

2) Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig

3) Stabilität: Die Lösung ist von Anfangsbedingungen & Randbedingungen abhängig

ill-posed: Falls einer dieser Bedingung nicht erfüllt wird

3.10.1 Neumann-Problem

Wir haben ein spezifisches Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial R \end{cases}$$

Wir haben also eine Randbedingung bezüglich zur Ableitung senkrecht zum Rand. Wir schauen uns dieses Beispiel an um die 'well-posedness' der PDE's zu untersuchen.

Def.

Um eine zwingende Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

$$\int_{\partial R} g \overset{BC}{=} \int_{\partial R} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial R} \nabla u \cdot n \overset{Gauss}{=} \int_R \operatorname{div}(\nabla u) = \int_R \Delta u = 0$$

Da u eine Lösung der Laplace Gleichung ist, muss $\Delta u = 0$ gelten. Deshalb muss die Randbedingung folgendes Kriterium erfüllen: $\int_{\partial R} g \overset{!}{=} 0$

Das Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\partial R} g \neq 0$

Bsp. 62

1.MC9 [3 Points] Consider the Neumann problem for the following PDE,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{in } D_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial D_2, \end{cases}$$

with D_2 the disk of radius 2 centred at 0 and f and g are two given functions such that

$$\int_{D_2} f(x)\, dx = 2, \qquad \text{and} \qquad \int_{\partial D_2} g(x)\, dx = 2.$$

Which of the following is true:

(A) There are infinitely many solutions.

(B) There is no solution.

(C) There are two solutions.

(D) We cannot conclude that (A), (B), or (C) are true.

Um eine zwingende Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

$$\int_{\partial R} g \overset{BC}{=} \int_{\partial R} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial R} \nabla u \cdot n \overset{Gauss}{=} \int_R \operatorname{div}(\nabla u) = \int_R \Delta u = f$$

$2 = 2 \Rightarrow$ We can't conclude anything

1.MC9 [3 Points] Consider the Dirichlet problem for the Laplace equation,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\},$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in R, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \le y \le 2, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,2) = f(x) & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

where f is a continuous function.

(A) There are infinitely many solutions.
(B) We cannot say anything.
(C) There is a unique solution.
(D) There is no solution.

Bsp. 63

We have learnt that there exist an unique solution for the Dirichlet-Problem on a rectangle

(To prove that we have unique solution, assume that u_1, u_2 are solutions to the Laplace equation:

$$\begin{cases} \Delta v = u_1 - u_2 = 0 \\ v(0,y) = u_1(0,y) - u_2(0,y) = 0 \\ v(1,y) = u_1(1,y) - u_2(1,y) = 0 \\ v(x,2) = u_1(x,2) - u_2(x,2) = f(x) - f(x) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$)

3.11 PDE's an Prüfungen

Exam	Classification	1D Wave	1D Heat	Laplace
W 17		D'Alembert, Fourier Series Solution		Rectangle via Sep. of Variables
S 17		D'Alembert	Sep. of Variables	Rectangle w. inhom. BCs
W 18	x	D'Alembert	Infinite Bar via general solution	Rectangle via Sep. of Variables
S 18		D'Alembert	Infinite Bar via Fourier Int., inhom. BCs	
W 19		D'Alembert, Inhom. BCs	Sep. of Variables	Max. Principle
S 19	x	D'Alembert, Sep. of Variables	Infinite Bar via Fourier Transform	Mean Value, Max. Principle
W 20	x	D'Alembert	Sep. of Variables	Mean Value, Max. Principle
S 20		D'Alembert	Sep. of Variables	
W 21	x	D'Alembert, Fourier Series Solution		Rectangle
S 21		D'Alembert, Sep. of Variables, Fourier Series Solution		
W 22	x	D'Alembert		Inhom. BCs, Fourier Transform (different PDE)
S 22		D'Alembert, Inhom. BCs	Sep. of Variables	
W 23	x	D'Alembert, Fourier Series Solution	Sep. of Variables	Well-posed/Ill-posed, Max. Principle
S 23	x	D'Alembert, Fourier Series Solution	Sep. of Variables	Well-posed/Ill-posed, Max. Principle
W 24	x	D'Alembert, Fourier Transform (PDE)	Sep. of Variables	Well-posed/Ill-posed, Max. Principle
S24	x	D'Alembert, inhom. BCs		Well-posed/Ill-posed, Max. Principle, Rectangle