Methode der Charakteristiken

Methode, welche es ermöglicht PDE "schneller" zu finden. Die Idee ist es mit einer Koordinatentransformation die PDE in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen umzuwandeln. Dann löst man die Gleichungen im vereinfachten Koordinatensystem

- Wir starten mit der allgemeinen Form einer linearen PDE zweiter Ordnung: $A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_{xx})$
  haben wir vor zwei Wochen behandelt
- In dieser Form, können wir den Typ der PDE (hyperbolisch, parabolisch, elliptisch). Der Typ der PDE ist wichtig für die Wahl einer passenden Koordinatentransformation.
- Wir notieren die charakterische Gleichung: $A y'^2 - 2By' + C = 0$, hierbei sind A, B, C sowie bei der Klassifizierung der PDE und $y = y(x)$
  müssen konstant sein für die Mitternachtsformel, falls A, B, C nicht konstant, erhalten wir eine nicht lineare DGl wo wir nun in gewissen Fällen lösen (siehe Example 4.13 im Vorlesungsskript)
- Wir lösen nach y' auf: $y' = \dfrac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \lambda_{1,2}$
- Durch einfache Integration erhalten wir: $c_1 + \int \lambda_1 \, dx = y_1 = \lambda_1 x + c_1$; $c_2 + \int \lambda_2 \, dx = y_2 = \lambda_2 x + c_2$
- Theorem besagt, dass $\Phi(x,y) = c_1 = y - \lambda_1 x$ und $\Psi(x,y) = c_2 = y - \lambda_2 x$ zwei unabhängige Lösung der charakteristischen Gleichung sind. Hierbei werden Φ und Ψ Charakteristiken genannt.
- Basierend auf den Typ der PDE können wir entsprechend neue Variabeln v, w definieren für die Koordinatentransformation:
  - Hyperbolisch: $v = \Phi(x,y)$; $w = \Psi(x,y)$
  - Parabolisch: $v = x$; $w = \Psi(x,y) = \Phi(x,y)$
  - Elliptisch: $v = \frac{1}{2}\left(\Psi(x,y) + \Phi(x,y)\right)$ $w = \frac{1}{2}\left(\Phi(x,y) - \Psi(x,y)\right)$

Um die Koordinatentransformation zu vervollständigen müssen wir die Ableitungen der ursprünglichen Ableitungen nun mit u und v neu berechnen.

basiert auf totales Differential und Kettenregel $\rightsquigarrow u = v(x,y) \cdot w(x,y)$
bsp. $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
$\frac{df}{dt} = f_x \dot{x} + f_y \dot{y}$

$$u_x = u_v v_x + u_w w_x$$
$$u_y = u_v v_y + u_w w_y$$
$$u_{xx} = u_{vv} v_x^2 + u_v \cdot v_{xx} + u_{ww} \cdot w_x^2 + u_w \cdot w_{xx} + 2 v_x w_x \cdot u_{vw}$$
$$u_{yy} = u_{vv} \cdot v_y^2 + u_v \cdot v_{yy} + u_{ww} \cdot w_y^2 + u_w \cdot w_{yy} + 2 v_y w_y u_{vw}$$
$$u_{xy} = u_{vv} \cdot v_x \cdot v_y + u_v \cdot v_{xy} + u_{ww} w_x \cdot w_y + u_w \cdot w_{xy} + (v_y \cdot w_x + v_x w_y) u_{vw}$$

- PDE in der Normalform aufschreiben:
  - Hyperbolisch: $u_{vw} = F(v, w, u, u_v, u_w)$
  - Parabolisch: $u_{vv} = F(v, w, u, u_v, u_w)$
  - Elliptisch: $u_{vv} + u_{ww} = F(v, w, u_v, u_w)$

- Integriere entsprechend und substituiere zurück zu x, y, um die allgemeine Lösung zu erhalten

Lösen Sie die folgende PDE mit der Methode der Charakterisken: $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

① A, B, C und PDE Typ bestimmen durch Koeffizientenvergleich:

$$\boxed{A\, u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)}$$

② Charakterische Gleichung und ihre Lösungen

③ Bestimme $\Phi(x,y)$ und $\Psi(x,y)$

④ Bestimme v und ω

⑤ Berechne neue Ableitungen mit neuen Variablen v,ω

Bsp. 1

$u_{xx} = u_{vv}\, v_x^2 + u_v \cdot v_{xx} + u_{ww} \cdot w_x^2 + u_w \cdot w_{xx} + 2 v_x w_x \cdot u_{vw} =$

$u_{yy} = u_{vv} \cdot v_y^2 + u_v \cdot v_{yy} + u_{ww} \cdot w_y^2 + u_w \cdot w_{yy} + 2 v_y w_y u_{vw} =$

$u_{xy} = u_{vv} \cdot v_x \cdot v_y + u_v \cdot v_{xy} + u_{ww}\, w_x \cdot w_y + u_w \cdot w_{xy} + (v_y \cdot w_x + u_x w_y) u_{vw} =$

⑥ Normalform bestimmen:

⑦ Integrieren

⑧ Rucksubstitution zu x,y:

3.5 Normalform

Mit geeigneter Substitutionen kann eine PDE zweiter Ordnung in **Normalform** gebracht werden, d.h.:

$u_{vw} = F(v, w, u, u_v, u_w)$	hyperbolisch
$u_{vv} = F(v, w, u, u_v, u_w)$	parabolisch
$u_{vv} + u_{ww} = F(v, w, u, u_v, u_w)$	elliptisch

3.5.1 Vorgehen

Gegeben PDE zweiter Ordnung in $\{x, y\}$

- Bestimme A,B,C und die zwei Lösungen der charakteristischen Gleichung $A(y')^2 - 2By' + C = 0$
- Nun kann man die ODE nach der Steigung y' auflösen und erhält: $y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \lambda_{1,2}$
- Da A,B und C Konstanten sind, erhalten wir eine gewöhliche DGL mit zwei verschiedene Lösungen: $\phi(x, y) = C_1 = y_1 -_1 \cdot x, \psi(x, y) = c_2 = y_2 -_2 \cdot x$
- $\phi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ werden als Charakter.istiken bezeichnet. Nun können zwei neue Variablen v,w definiert werden. Hierbei ist $u =$ Die Definition ist für jeden Typ von PDE unterschiedlich (siehe unten)
- Berechne die Ableitungen der ursprünglichen Gleichung mit v und w. Die Kettenregel ist hier extrem wichtig. Sehr nützliche Ableitungen für $u = v(x, y) \cdot w(x, y)$ sind weiter unten.
- Setze alles in die PDE ein und erhalte die Normalform
- Integriere entsprechend und substituiere zurück, um die allgemeine Lösung zu erhalten

hyperbolisch:	$v = \varphi(x, y)$	$w = \psi(x, y)$
parablisch:	$v = x$	$w = \psi(x, y)$
elliptisch:	$v = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) + \psi(x, y)]$	$w = \frac{1}{2}[\varphi(x, y) - \psi(x, y)]$

$$\begin{aligned}
u_x &= u_v \cdot v_x + u_w \cdot w_x, \\
u_y &= u_v \cdot v_y + u_w \cdot w_y, \\
u_{xx} &= u_{vv} \cdot v_x^2 + u_v \cdot v_{xx} + u_{ww} \cdot w_x^2 + u_w \cdot w_{xx} + 2v_x \cdot w_x \cdot u_{vw}, \\
u_{yy} &= u_{vv} \cdot v_y^2 + u_v \cdot v_{yy} + u_{ww} \cdot w_y^2 + u_w \cdot w_{yy} + 2v_y \cdot w_y \cdot u_{vw}, \\
u_{xy} &= u_{vv} \cdot v_x \cdot v_y + u_v \cdot v_{xy} + u_{ww} \cdot w_x \cdot w_y + u_w \cdot w_{xy} \\
&\quad + (v_y \cdot w_x + v_x \cdot w_y) \cdot u_{vw}.
\end{aligned}$$

D'Alembert Lösung

Für die 1D Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ gegeben mit folgender Koordinatentransformationen: $v = x + ct$ und $w = x - ct$

Wir können wie beim vorherigen Beispiel die transformierten Ableitungen bestimmen. Beachte wir haben jetzt einfach ein t anstatt y.

- $v_t = c \quad v_x = 1 \quad w_t = -c \quad w_x = 1$
- $w_{xt} = w_{xx} = w_{tt} = v_{xx} = v_{tt} = 0$
- $u_{xx} = u_{vv}\underbrace{v_x^2}_{1} + u_v \cdot \cancelto{0}{v_{xx}} + u_{ww} \cdot \underbrace{w_x^2}_{1} + u_w \cdot \cancelto{0}{w_{xx}} + 2\underbrace{v_x w_x}_{1} \cdot u_{vw} = u_{vv} + u_{ww} + 2u_{vw}$
- $u_{tt} = u_{vv} \cdot \underbrace{v_t^2}_{c^2} + u_v \cdot \cancelto{0}{v_{tt}} + u_{ww} \cdot \underbrace{w_t^2}_{c^2} + u_w \cdot \cancelto{0}{w_{tt}} + 2\underbrace{v_t\, w_t}_{-c^2}\, u_{vw} = (u_{vv} + u_{ww} - 2u_{vw})\, c^2$

Durch einsetzen in die PDE und vereinfachen, erhalten wir eine PDE, welche einfach durch integrieren gelöst werden kann:

$$\cancel{c^2}(\cancel{u_{vv}} - 2u_{vw} + \cancel{u_{ww}}) = \cancel{c^2}(\cancel{u_{vv}} + \cancel{2}u_{vw} + \cancel{u_{ww}})$$

$$u_{vw} = 0 \quad \overset{\iint}{\Longrightarrow} \quad u(x,t) = \varphi(v) + \psi(w) \overset{\text{Rücksubstitution}}{\overset{!}{=}} \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Die Lösung, welche wir erhalten haben, wird auch (allgemeine) D'Alembert Lösung genannt:

Def $\boxed{u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)}$

Falls man zusätzlich zwei Anfangswertbedingungen berücksichtigt, erhält man das Cauchy Problem und der dazugehörigen D'Alembert Lösung

Def.

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad \text{(Cauchy Problem)}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, d(s)$$

Wir haben hier <u>keine Randbedingung</u>. Das heisst die Welle kann sich also bei dieser Lösung sozusagen "frei" im Raum bewegen.

- Wenn wir die d'Alembert Lösung anschauen an einem bestimmten (x_0, t_0) betrachten, stellen wir fest, dass sie nur von der Anfangsbedingung innerhalb des Intervalls $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ abhängt. Das liegt, daran dass Informationen, die aus dem Intervall stammen, den Ort x_0 innerhalb der Zeit t_0 erreicht haben. Dieses Intervall wird daher als "Domain of Dependence" bezeichnet. Anfangbedingungen ausserhalb dieses Bereichs haben keinen Einfluss auf die Welle (x_0, t_0), da diese Informationen aus diesen Position zu langsam sind x_0 innerhalb der Zeit t_0 zu erreichen.
- Genau umgekehrt können wir uns fragen: Welcher Bereich I im (x,t)-Raum wird von einer Anfangsbedingung an der Stelle a beeinflusst a? Dieser Bereich wird als "Region of Influence" bezeichnet und wird begrenzt bei $x \pm ct = a$

Bsp. 2

Sei $u(x,t)$ die Lösung von der eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} & , x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Finden Sie $u(0, \frac{1}{2})$ mit der d'Alembertsche Formel

b) Finden Sie $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

a) Formel: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds}$

b)

Bsp. 3

Prüfungsaufgabe Winter 2015

5. Gegeben sei eine unendliche Saite, welche zur Zeit $t = 0$ horizontal um

$$u(x,0) = \ln\left(\frac{2+e^x}{1+e^{-x}}\right)$$

ausgelenkt werde. Weiter wird angenommen, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null sei und dass sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1$ entlang der Saite ausbreiten.

a) Formulieren Sie das Problem mathematisch.

b) Finden Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems.

c) Berechnen Sie nun $\lim\limits_{t\to\infty} u(2,t)$.

a)

b) Formel: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds}$

c)

Tipps Serie 10

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) • Betrachte Interval $x \in (-1, 1)$
 • Gerade oder ungerade Funktion? ⇝ wie muss die Funktion dann aussehen?
 • Wo sind Maxima / Minima von $f(x)$?

b) Verwende Integral um d'Alembert Lösung zuerhalten

c) Errinerung: Wann ist $f(x) = 0$

2) **3.3 Eindimensionale Wellengleichung** (für 2a)

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

a) B_n^* und B_n sind ohne Integral berechenbar ⇝ Koeffizientenvergleich

b) • einfach gegebenes Integral berechnen
 ($g(s)$ ist schon 2π-periodisch)
 • Überprüfung ob a und b gleich sind
 ↳ Nutze: $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

3) Integral berechnen für D'Alembert Losung

4) a) Integral berechnen für D'Alembert Losung
b) Grenzwert bestimmen von der Funktion, welche wir in 4a) gefunden haben