Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung beschreibt eine Temperaturverteilung $u(x,t)$ eines Stabs der Länge L, welcher entlang der x-Achse ausgerichtet ist

Def.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \,, \; t \geq 0 & \Rightarrow \text{Randbedingungen} \\ u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L & \Rightarrow \text{Anfangswertbedingungen} \end{cases} \quad \text{mit } c^2 = \frac{\kappa}{\sigma \rho}$$

↪ mehr hierzu in Thermo III und in WuF

c: Temperaturleitfähigkeit
κ: Thermische Leitfähigkeit
σ: spezifische Wärmekapazität
ρ: Dichte des Stabs

Annahmen:
- Wärme fliesst nur in x-Richtung
- $T = 0$ bei $x = 0$ und $x = L$
- Anfangsbedingungen durch $f(x)$ beschrieben

Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

Gleiches Vorgehen wie bei Wellengleichung mit Separation der Variabele

1) Separation der Variabeln
2) Fallunterscheidung
3) Superposition der Lösung ⇒ Fourier-Reihe

Bsp. 1

Finde $u(x,t)$, so dass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \,, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$ gilt.

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}(F \cdot G) = F \frac{\partial}{\partial t} G = F \dot{G}$$

↑ $F(x)$ wie eine konstante Faktor bzgl. t

$\dot{G} \Leftrightarrow \ddot{G}$

Wärme PDE ⇔ Wellen PDE

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F \cdot G) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = F'' G$$

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F \dot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F: $\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesen Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = c^2 k G \end{cases} \Rightarrow \text{Dass sind jetzt zwei ODE's}$$

2 Fallunterscheidung (Many solutions)

⇝ kein Unterschied zur Wellengleichung $F(x)$

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k = 0, k > 0, k < 0$:

① $k = 0$: $F'' = 0 \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx} = A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x) = Ax + B$

Randbedingung: $F(0) = B = 0 \quad F(L) = AL = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

⇝ Temperatur überall null
⇝ interessiert uns nicht

② $k > 0$: $F'' - kF = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{k} \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}$

Randbedingung: $F(0) = A + B = 0 \quad A = -B \quad F(L) = A(e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L}) = 2A \sinh(\sqrt{k}L) = 0 \;\forall k > 0 \Rightarrow A = 0$

$F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

③ $k < 0$: $F'' + |k| F = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|}\,i \Rightarrow F(x) = A\cos(\sqrt{|k|}x) + B\sin$

Randbedingung: $F(0) = A = 0 \quad F(L) = B \sin(\sqrt{|k|}L) = 0 \;\forall k < 0$

$\Rightarrow B = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

$\Rightarrow$ oder $\sqrt{|k|}L = n\pi \overset{k<0}{\Rightarrow} k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Eingesetzt in die $\dot{G} = c^2 k G$, welche von t abhängt, erhalten wir:

$\dot{G} + c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten $\lambda + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0$ $\lambda = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow G_n(t) = C_n\, e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$

~> könnten es jetzt auch einfach integrieren

Für die Konstanten verwenden wir Index n, um zu verdeutlichen, dass je nach n möglicherweise wir unterschiedliche Lösungen erhalten

$u_n(x,t) = F_n(x)\cdot G_n(t) = B_n\, e^{-\lambda_n^2 t}\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+$

Hier sind B_n und B_n^* die Kombinationen der Konstanten aus F und G. Wir haben $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$ definiert.

3 Zusammensetzung der Lösung mit der Fourier Reihe

Bsp. 1

Wir haben eine bzw. unendliche Lösungen, welche die Wärmegleichung und ihre Randbedingungen erfüllen, mit unterschiedlichen Frequenzen λ_n. Jedoch erfüllen diese Lösungen meistens die Anfangsbedingungen nicht. Um dieses Problem zu lösen, können wir die Linearität der PDE zu nutze machen und die Lösung als Superposition aller "Basislösungen" darstellen.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Anfangsbedingungen: $\cdot\, u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer $2L$ perioden, ungeraden Funktion. Wenn wir also $f(x)$ ungerade, $2L$-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

~> eine Konstante weniger als bei der Wellengleichung, da "eine Ableitung" weniger
~> eine Anfangsbedingung weniger

- Die Gleichungen, die wir in Bsp. 1 bestimmt haben, können als generelle Lösung für die Wärmegleichung verwendet werden, falls sie die gleichen Randbedingungen besitzen.

Def. Für eine 1D-Wärmegleichung der Form $u_t = c^2 u_{xx}$ und den Anfangs-/Randbedingungen $x \in [0,L]$: $\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

- Wichtig zu beachten, dass wir bei anderen Randbedingungen auch ein andere allgemeine Lösung erhalten. Eine häufige andere Variante, welche ihr auch auf der Zusammenfassung findet:

Def. Für eine 1D-Wärmegleichung der Form $u_t = c^2 u_{xx}$ und den Anfangs-/Randbedingungen $x \in [0,L]$: $\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n\cdot e^{-\lambda_n^2 t}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

Prüfungsaufgabe Winter 2023

2.Q1 [15 Points] Heat Equation with inhomogeneous boundary conditions

Find the general solution of the Heat equation (**with inhomogeneous boundary conditions**) for the following problem:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \le x \le \pi, t \ge 0, \\ u(0,t) = 5, & t \ge 0, \\ u(\pi,t) = 8, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x) + w(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

where w is the function that you have to find in point $a)$ and f is given by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \in [0,\pi), \\ 0 & \text{if} \quad x = \pi. \end{cases}$$

You must proceed as follows.

a) Find the unique function $w = w(x)$ with $w'' = 0$, $w(0) = 5$, and $w(\pi) = 8$.

b) Define $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$. Formulate the corresponding problem for v, equivalent to (1).

c) Find, using the formula from the script, the solution $v(x,t)$ of the problem you have just formulated.

d) Write down explicitly the solution $u(x,t)$ of the original problem (1).

a)

b)

Bsp. 2

3.6 Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

3.6.1 Vorgehen 1:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbediungungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0,L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$\Rightarrow$ Manchmal ist B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

Indefinite Integrals: $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 1})$

1)	$\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left(\frac{n\pi}{L}\right) x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)
2)	$\int x^2\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x^2 - 2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)
3)	$\int x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \left(\frac{n\pi}{L}\right) x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$ (+constant)
4)	$\int x^2\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{\left(2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x^2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + 2\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}$ (+constant)
5)	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$ (+constant)

c)

d)

Generalisierung zu mehreren Dimensionen

Wir können die 1D Wärmegleichung zu beliebigen Dimensionen erweitern mit den Laplace Operator $\Delta = \nabla^2$

Def. $u_t = c^2 \Delta u$ mit 1D: $\Delta u = u_{xx}$ 2D: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ 3D: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

behandeln wir nicht in diesem Kurs

Zeitunabhängige Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten oft "steady-state" Situationen, bei welchen die Temperaturverteilung ein Equilibrium erreicht und folglich unabhängig von der Zeit ist ($u \neq u(t)$) Die stationäre Wärmeleitung ($u_t = 0$) lässt sich zur sogenannten Laplace-Gleichung vereinfachen.

Laplace Gleichung

Def. $\Delta u = 0$

Viele physikalische Probleme können mathematisch als Laplace Gleichung aufgefasst werden. Wir definieren eine Region R, auf welcher die Laplace-Gleichung gilt. Beispielsweise könnte diese Region in 3D eine Kugel, in 2D ein Rechteck oder in 1D ein Stab sein.

Um eine spezifische Lösung zu finden, definieren wir Randbedingungen. Wir haben eine Anfangswertbedingungen, da die Gleichung ja zeitunabhängig ist.

Typische Arten von Randbedingungen sind:
- Dirichlet Boundary Conditions: Wir geben vor wie die Funktion u entlang vom Rand aussieht
- Neumann Boundary Conditions: Wir geben vor wie die Ableitungen von u entlang vom Rand aussehen

Dirichlet-Problem auf einem Rechteck

Das Dirichlet-Problem beschreibt eine stationäre Temperaturverteilung einer rechteckigen Platte. Auf drei Seiten der Platte ist die Randtemperatur 0 und entlang der vierten ist sie durch $f(x)$ beschrieben. Mathematisch kann man das festhalten als:

Def.
$$\Delta u = 0 \qquad 0 \le x \le a, \; 0 \le y \le b$$
$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= u(a,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,b) &= f(x) \end{aligned}\right\} \text{Randbedingungen}$$

Bsp. 3

Finde $u(x,t)$, so dass $\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 \le x \le a, \; 0 \le y \le b \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$ Randbedingung

Separation der Variabeln

Annahme: $u(x,y) = F(x) \cdot G(y)$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen unserer PDE: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F'' \cdot G \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F \cdot \ddot{G} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F'' \cdot G + F \cdot \ddot{G} = 0 \qquad \frac{F''}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = k$$

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = -kG \end{cases} \Rightarrow$$

Nutze RB: $u(0,y) = F(0) \cdot G(y) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$

$u(a,y) = F(a) \cdot G(y) = 0 \Rightarrow F(a) = 0$

Fallunterscheidung (Many Solutions) ~ kein Unterschied zur Wellengleichung $F(x)$

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0, k>0, k<0$:

① $k=0$: $F''=0 \quad \frac{d^2F}{dx^2}=0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx}=A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x)=Ax+B$

Randbedingung: $F(0)=B=0 \quad F(a)=Aa=0 \quad F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)
~ Temperatur überall null ~ interessiert uns nicht

② $k>0$: $F''-kF=0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2-k=0 \quad \lambda=\pm\sqrt{k} \Rightarrow F(x)=Ae^{\sqrt{k}x}+Be^{-\sqrt{k}x}$

Randbedingung: $F(0)=A+B=0 \quad A=-B \quad F(a)=A(e^{\sqrt{k}a}-e^{-\sqrt{k}a})=2A\sinh(\sqrt{k}a)=0 \;\forall k>0 \Rightarrow A=0$

$F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

③ $k<0$: $F''+|k|F=0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2+|k|=0 \quad \lambda=\pm\sqrt{|k|}i \Rightarrow F(x)=A\cos(\sqrt{|k|}x)+B\sin(\sqrt{|k|}x)$

Randbedingung: $F(0)=A=0 \qquad F(L)=B\sin(\sqrt{|k|}L)=0 \;\forall k<0$

$\Rightarrow B=0 \quad F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

$\Rightarrow$ oder $\sqrt{|k|}a=n\pi \overset{k<0}{\Rightarrow} k=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

Bsp. 3

Eingesetzt in die $\ddot{G}=-kG$, welche von t abhängt, erhalten wir:

$\ddot{G}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2G=0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten $\lambda^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2=0 \quad \lambda=\pm\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow G_n(y)=C_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+D_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}$

$\rightarrow$ Wir haben noch eine weitere Randbedingung $G(0)=0=C_n+D_n \Rightarrow C_n=-D_n$

$G_n(y)=C_n\left(e^{\frac{n\pi}{a}y}-e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)=2C_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

$u_n(x,t)=F_n(x)\cdot G_n(y)=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot 2\cdot C_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)=\underbrace{B_n}_{B_n=B_n\cdot C_n\cdot 2}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^+$

Superposition der Lösungen

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

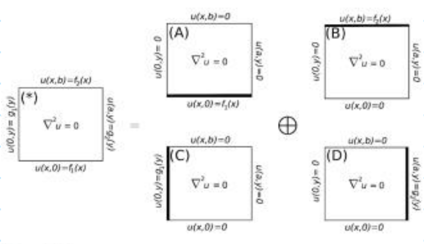
$$u(x,b)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

Jetzt haben wir aber vllt. nicht die Randbedingung
$\begin{cases} u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$ sondern einen genereller Fall.

Fall $\begin{cases} u(0,y)=g_1(y) \\ u(a,y)=g_2(y) \\ u(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=f_2(x) \end{cases}$. Um diesen Fall zu lösen, können wir jeweils alle Ränder bis auf ein Rand auf null setzen und dann alle 4 Basisfälle addieren.

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem



Lösung für A:

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)$$

$$A_n=\frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n=\frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$C_n=\frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$D_n=\frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g_2(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy$$

Lösung für A+B+C+D=(*):

$$u=u_1+u_2+u_3+u_4$$

Prüfungsaufgabe Winter 2017

5. (*6+4 Points*) Consider the system

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = 0 = u(\pi, y), & 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(x, \pi) = 3\sin(2x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

a) Find the general solution $u(x, t)$ of

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = 0 = u(\pi, y), & 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

via a separation of variables argument (please show the details)

b) Find the solution of

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = 0 = u(\pi, y), & 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(x, \pi) = 3\sin(2x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

a)

Bsp. 4

b)

Tipps Serie 11

$\equiv$ = wichtig
$\equiv$ = hilfreich
$\equiv$ = nicht so wichtig

1) • Gleiches Vorgehen wie bei der Herleitung der allgemeinen Lösungen der Warmeleitungsgleichung

• Hint: Schaut, ob ihr Koeffizientenvergleich machen könnt, wenn ihr bei $u(x,0) = f(x) =$ Fourier-Reihe angekommen seid.

2) • Wir können folgende Formel verwenden:

3.6 Wärmeleitungsgleichung (Heat equation)

3.6.1 Vorgehen 1:

Sei $u_t = c^2 u_{xx}$ mit Randbediungungen $u(0,t) = u(L,t) = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ auf $x \in [0, L]$. Via Fourier-Reihe erhalten wir die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad ; \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$\Rightarrow$ Manchmal ist B_n auch über Koeffizientenvergleich bestimmbar!

• Für welches x ist $u(x,t)$ maximal angenommen

t ist fixiert $\overset{?}{\Rightarrow} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

• Um t^* zu bestimmen verwende $u(x_{max}, t^*) = 30$

3) • Löse mit Separation der Variabeln

• Wir haben diese PDE nicht auf der ZF $\rightsquigarrow$ können es also nichts 1:1 abschreiben :)

4) • Gleiches Vorgehen wie bei der Herleitung der allgemeinen Lösungen

• Anhand der Randbedingung schauen, welche der beide Gleichungen zuerst gelöst wird $\begin{cases} F'' = kF \\ G'' = kG \end{cases}$

↳ Hint: $u(x,0) = u(x,b) = 0 \Rightarrow G(0) = G(b) = 0$