1D Wärmeleitungsgleichung von einer unendlichen Stange

Wir schauen uns jetzt an, wie man die Temperaturverteilung entlang einer unendlich langer, eindimensionaler Stange bestimmt. Wir beobachten die Wärmeleitungleichung auf ganz $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass wir keine Randbedingungen haben. Wir haben nur eine Anfangswertbedingung.
wie D'Alembert für Wellengleichung

Mathematisch können wir es auffassen als:

Def. $$\boxed{\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}}$$

Wir können dieses Problem durch folgende zwei Ansätze lösen
1. Fourier Integral
2. Fourier Transform

Wir erhalten mit beiden Methoden folgende Lösung:

Def. $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-\left(\frac{(x-v)}{2c\sqrt{t}}\right)^2} dv}$$

Fourier Integral Lösung

Durch Separation der Variabeln erhalten wir die generelle Form:

Def.
$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\cdot\sin(px)\right]\cdot e^{-c^2p^2t}\, dp$$
$$u(x,0) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right] dp = f(x)$$
mit
$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\, dv$$
$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\, dv$$

Bsp. 1

Finde $u(x,t)$, so dass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$, $x \geq 0$ gilt.

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}(F\cdot G) = F\frac{\partial}{\partial t}G = F\dot{G}$$
↑ F(x) wie eine konstante Faktor bzgl. t
$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F\cdot G) = G\frac{\partial^2}{\partial x^2}F = F''G$$

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F\dot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F: $\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesem Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = c^2 kG \end{cases}$$ => Dass sind jetzt zwei ODE's

2 Fallunterscheidung (Many Solutions)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0$, $k>0$, $k<0$:

① $k=0$: $F''=0$ $\quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx} = A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x) = Ax + B$

② $k>0$: $F'' - kF = 0$ => ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{k} \Rightarrow F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$

③ $k<0$: $F'' + |k|F = 0$ => ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{|k|}i \Rightarrow F(x) = A\cos(\sqrt{|k|}x) + B\sin(\sqrt{|k|}x)$

Wir lösen die zweite Gleichung: $\dot{G} = c^2kG \Rightarrow \lambda - c^2k = 0 \Rightarrow G(t) = Ce^{c^2kt}$

Bsp. 1

Nur wenn $k<0$ wird $\lim_{t\to\infty} u(x,t) \to 0$ und nur diese Lösung macht physikalisch Sinn

$$u_k(x,t) = F_k(x)\cdot G_k(t) = \left(A(k)\cos(\sqrt{|k|}\,x) + B(k)\sin(\sqrt{|k|}\,x)\right)\cdot C_k e^{-c^2|k|t} \overset{k=p^2}{=} \left(\overset{:=AC}{A(p)}\cos(px) + \overset{:=BC}{B(p)}\sin(px)\right)\cdot e^{-c^2p^2t}$$

Superposition: $u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\cdot\sin(px)\right]\cdot e^{-c^2p^2t}\,dp$

Wir verwenden die Anfangswertbedingung: $u(x,0) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\right]dp = f(x)$

Dies sieht genauso aus wie ein Fourier Integral. Folglich gilt für $A(p)$ und $B(p)$:

$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(pv)\,dv$ und $B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\sin(pv)\,dv$

Wenn wir die Konstanten einsetzen und vereinfachen (siehe Skript S. 81/82) erhalten wir die Formel: $u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,e^{-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2}\,dv$

Bsp. 2

Bestimmen Sie für $x\in\mathbb{R}$ und $t\geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung: $u_t = c^2u_{xx}$ unter der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x|<1 \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$ in Form eines Fourier Integrals.

Formel: $u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos(px) + B(p)\cdot\sin(px)\right]\cdot e^{-c^2p^2t}\,dp$

Fourier Transform Lösung

Die Fourier Transformation der Lösung ist gegeben durch:

Def. $\boxed{\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cdot e^{-c^2\omega^2 t} \quad u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}\}(x)}$

Wichtig: Die Fourier Transformation ist in diesem Kontext immer in Bezug auf x.

Eigenschaften der Fourier Transformation (Recap Woche 6)

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\,\mathcal{F}\{f(x)\} + \beta\,\mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x-shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ia\omega}\,\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t-shifting, aber ohne Heaviside
- ω-shift: $\underbrace{\mathcal{F}(\omega-a)}_{\hat{f}(\omega-a)} = \mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\}$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega\,\mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2\,\mathcal{F}\{f(x)\}$ } ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -i\,\mathcal{F}\{x\cdot f(x)\}(\omega)$ } ähnlich wie bei Laplace mit i etc.
- Faltung (Convolutions): $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}$ } auch ähnlich wie bei Laplace aber $\sqrt{2\pi}$-Term

wird noch auf ZF ergänzt

Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\,dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ak^2+bk+c)}\,dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Bsp. 3

Finde $u(x,t)$, so dass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$, $x \geq 0$ gilt.

Die PDE $u_t = c^2 u_{xx}$ kann man durch die Fourier Transformation in den Frequenzbereich bringen:

Die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ müssen wir auch Fourier transformieren:

Durch Inverse Fourier Transformation erhalten wir

Wenn wir die Fourier Transformation einsetzen und vereinfachen (siehe Skript S. 83) erhalten wir die Formel: $u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2}\,dv$

Prüfungsaufgabe Winter 2024

3.Q1 [10 Points] PDE with Fourier transform

Solve the following partial differential equation on an infinite bar:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \frac{1}{2}u_{xx}(x,t) + u(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

via the Fourier transform with respect to x. You must simplify your solution as much as possible, no unsolved integrals.

Hints: You can proceed as follow:

- First, transform the partial differential equation into a differential equation in time t using the Fourier transform. Use that, for $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{-i\omega}{(2a)^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

- Solve the solution of this ODE.
- Finally, take the inverse Fourier transform to find the solution $u(x,t)$. Use that, for $b > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-b\omega^2}\right)(x) = \frac{1}{(2b)^{3/2}}xe^{-\frac{x^2}{4b}}.$$

Eigenschaften:

1. $\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathfrak{F}(f) + \beta\mathfrak{F}(g)$
2. Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty}$ sowie f' (bzw. f'') absolut integrabel, so gilt:

$$\mathfrak{F}\left(f'(x)\right) = i\omega\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}\left(f''(x)\right) = -\omega^2\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}\left(x^2 f(x)\right) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$

3. Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrabel, so ist

$$\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\cdot\mathfrak{F}(f)\cdot\mathfrak{F}(g)$$
$$\mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \sqrt{2\pi}\cdot\mathfrak{F}(f\cdot g)$$

4. Weitere nützliche Transformationen:

$$\mathfrak{F}(u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega, t)$$
$$\mathfrak{F}\left(t^2 u_x\right) = t^2\mathfrak{F}(u_x)$$
$$\mathfrak{F}(x\cdot y(x))(\omega) = i\mathfrak{F}'\left(y(x)\right)(\omega)$$

$$\mathfrak{F}\left(xe^{-ax^2}\right)(\omega) = \frac{i\omega}{(2a)^{3/2}}e^{\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right)}$$
$$\mathfrak{F}^{-1}\left(i\omega e^{-b\omega^2}\right) = \frac{x}{(2b)^{3/2}}e^{\left(-\frac{x^2}{4b}\right)}$$

x-Shift

$$\mathfrak{F}(f(x-a)) = e^{-ia\omega}\mathfrak{F}(f(x)) = e^{-ia\omega}\mathfrak{F}(\omega)$$

ω-Shift

$$\mathfrak{F}(\omega - a) = \mathfrak{F}\left(e^{iax}f(x)\right)$$

Bsp. 4

Tipps Serie 12

= wichtig

= hilfreich

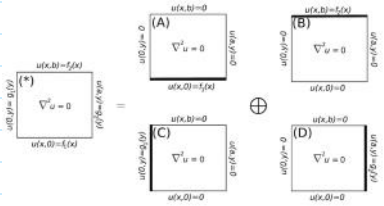
= nicht so wichtig

1) • Aus welchen zwei "Basisfällen" von A, B, C, D kann man die gegebenen Randbedingungen darstellen?

• Die finale Lösungen ist die Superposition der zwei Teillösungen ($\Rightarrow u = u_1 + u_2$)

• Kannst direkt die Formeln aus der ZF verwenden.

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem



Lösung für A:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi(b-y)}{a})$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^{a} f_1(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sinh(\frac{n\pi y}{a})$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh(\frac{n\pi b}{a})} \int_0^{a} f_2(x) \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\frac{n\pi(a-x)}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$C_n = \frac{2}{b \sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^{b} g_1(y) \sin(\frac{n\pi y}{b}) dy$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(\frac{n\pi x}{b}) \sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$D_n = \frac{2}{b \sinh(\frac{n\pi a}{b})} \int_0^{b} g_2(y) \sin(\frac{n\pi y}{b}) dy$$

Lösung für A+B+C+D=(*):

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

2) • Recap: Inhomogene Randbedingungen bei der Wellengleichung

• Ähnlich wie Serie 9) Aufgabe 4

• Identisch wie Beispiel 3) Woche 9

3) • Überprüfe ob $f(x)$ gerade/ungerade ist?

• Bestimme $A(p)$ bzw. $B(p)$.

• Superposition der Lösungen

Formeln:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos(px) + B(p) \cdot \sin(px)] \cdot e^{-c^2 p^2 t} \, dp$$

$$u(x,0) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] \, dp = f(x)$$

mit

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) \, dv$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) \, dv$$

4) Identisch wie Beispiel 4 (Woche 12)

• Fourier Transformation der PDE (nach x)

• Lösen der resultierenden ODE

• Inverse Fourier Transformation der Lösung