

1D Wärmeleitungsgleichung von einer unendlichen Stange

Wir schauen uns jetzt an, wie man die Temperaturverteilung entlang einer unendlich langer, eindimensionalen Stange bestimmt. Wir beobachten die Wärmeleitungsgleichung auf ganz $\mathbb{R}$. Das bedeutet, dass wir keine Randbedingungen haben. Wir haben nur eine Anfangswertbedingung. wie D'Alembert für Wellengleichung

Mathematisch können wir es auffassen als:

Def.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Wir können dieses Problem durch folgende zwei Ansätze lösen

1. Fourier Integral

2. Fourier Transform

Wir erhalten mit beiden Methoden folgende Lösung:

Def.

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-\frac{(x-v)^2}{2c^2 t}} dv$$

Fourier Integral Lösung

Durch Separation erhalten wir die generelle Form:

Def.

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp$$

mit

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) dv$$

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] dp = f(x)$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \sin(pv) dv$$

Finde $u(x, t)$, sodass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}, x \geq 0$ gilt.

1 Separation der Variablen

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} (F \cdot G) = F \frac{\partial}{\partial t} G = F \dot{G}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F \cdot G) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = F'' G$$

$\dot{G} \Leftrightarrow \dot{G}$
Wärme PDE $\Leftrightarrow$ Wellen PDE

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F \dot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F : $\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

$$\begin{cases} F'' = kF \\ \dot{G} = c^2 kG \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das sind jetzt zwei ODE's

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesem Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t noch abhängt.

Bsp. 1

2 Fallunterscheidung (Many Solutions)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0, k>0, k<0$:

① $k=0$: $F''=0 \xrightarrow{\frac{d^2 F}{dx^2}=0} \frac{dF}{dx}=A \xrightarrow{\int} F(x)=A \cdot x + B$

② $k>0$: $F'' - kF = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{k} \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x}$

③ $k<0$: $F'' + |k|F = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{|k|}i \Rightarrow F(x) = A \cos(\sqrt{|k|}x) + B \sin(\sqrt{|k|}x)$

Wir lösen die zweite Gleichung: $\dot{G} = c^2 kG \Rightarrow \lambda - c^2 k = 0 \Rightarrow G(t) = C e^{c^2 k t}$

Nur wenn $t < 0$ wird $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) \rightarrow 0$ und nur diese Lösung macht physikalische Sinn

$$u(x,t) = F_k(x) \cdot G_k(t) = (A(k) \cos(\sqrt{k}x) + B(k) \sin(\sqrt{k}x)) \cdot C e^{-c^2 k t} \stackrel{t=0}{=} (A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)) \cdot e^{-c^2 p^2 t}$$

Superposition: $u(x,t) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp$

Wir verwenden die Anfangswertbedingung: $u(x,0) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] dp = f(x)$

Bsp. 1

Dies sieht genauso aus wie ein Fourier Integral. Folglich gilt für $A(p)$ und $B(p)$:

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) dv \quad \text{und} \quad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \sin(pv) dv$$

Wenn wir die Konstanten einsetzen und vereinfachen (siehe Skript S. 81/82) erhalten wir

die Formel: $u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4t}} dv$

Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ die Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung: $u_t = c^2 u_{xx}$ unter der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ in Form eines Fourier Integrals.

Formel: $u(x,t) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp$

① Berechne $A(p)$ und $B(p)$:

• Schau ob $f(x)$ gerade/ungerade: $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist gerade.

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v \cdot \cos(pv) dv = \frac{2}{\pi} \int_0^1 v \cdot \cos(pv) dv =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{v}{p} \sin(pv) \Big|_0^1 - \frac{1}{p} \int_0^1 \sin(pv) dv \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{p} \sin(p) + \frac{1}{p^2} \cos(pv) \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{p} \sin(p) + \frac{1}{p^2} \cos(p) - \frac{1}{p^2} \right]$$

$B(p) = 0$, da $f(v)$ gerade

② Superposition

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + \cancel{B(p) \sin(px)}] \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{p} \sin(p) + \frac{1}{p^2} \cos(p) - \frac{1}{p^2} \right] \cdot \cos(px) \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp$$

Bsp. 2

Fourier Transform Lösung

Die Fourier Transformation der Lösung ist gegeben durch:

Def. $\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \cdot e^{-c^2 \omega^2 t} \quad u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t} \} (x)$

Wichtig: Die Fourier Transformation ist in diesem Kontext immer in Bezug auf x .

Eigenschaften der Fourier Transformation (Recap Woche 6)

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x -shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i\omega a} \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t -shifting, aber ohne Heaviside
- ω -shift: $\mathcal{F}\{\hat{f}(\omega-a)\} = \mathcal{F}\{e^{i\omega a} f(x)\}$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}$ } ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -i \mathcal{F}\{x \cdot f(x)\}(\omega)$ } ähnlich wie bei Laplace mit t .
- Faltung (Convolutions): $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ } wird nach 2π ergänzt
auch ähnlich wie bei Laplace aber über $\int_0^\infty$

Nützliche Integrale

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx &= e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \pi & \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ak^2 + bk + c)} dk &= e^{\frac{b^2}{4a} + c} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

Finde $u(x, t)$, sodass $\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}, x \geq 0$ gilt.

Die PDE $u_t = c^2 u_{xx}$ kann man durch die Fourier Transformation in den Frequenzbereich bringen:

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -\omega^2 \mathcal{F}(u) = -c^2 \omega^2 \mathcal{F}(u)$$

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{d}{dt} [\mathcal{F}(u)]$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(u) = -c^2 \omega^2 \mathcal{F}(u) \quad \text{ODE 1. Ordnung}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -c^2 \omega^2 \hat{u}$$

$$\int \frac{1}{\hat{u}} d\hat{u} = -c^2 \omega^2 \int 1 dt$$

$$\ln(\hat{u}) = -c^2 \omega^2 t + C(\omega) \quad \sim \hat{u}(\omega, t) \text{ und wir integrieren ja nur über } t$$

$$\hat{u}(\omega, t) = D(\omega) \cdot e^{-c^2 \omega^2 t}$$

Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ müssen wir auch Fourier transformieren: $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega) = D(\omega)$

Durch Inverse Fourier Transformation erhalten wir: $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{-c^2 \omega^2 t} \cdot e^{i\omega x} d\omega$

Wenn wir die Fourier Transformation einsetzen und vereinfachen (siehe Skript S. 83) erhalten wir die Formel: $u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4ct}} dv$

Prüfungsaufgabe Winter 2024

3.Q1 [10 Points] PDE with Fourier transform

Solve the following partial differential equation on an infinite bar:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \frac{1}{2} u_{xx}(x, t) + u(x, t), & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = x e^{-\frac{1}{2} x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

via the Fourier transform with respect to x . You must simplify your solution as much as possible, no unsolved integrals.

Hints: You can proceed as follow:

- First, transform the partial differential equation into a differential equation in time t using the Fourier transform. Use that, for $a > 0$,

$$\mathcal{F}(x e^{-a x^2})(\omega) = \frac{-i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

- Solve the solution of this ODE.
- Finally, take the inverse Fourier transform to find the solution $u(x, t)$. Use that, for $b > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}(-i\omega e^{-b\omega^2})(x) = \frac{1}{(2b)^{3/2}} x e^{-\frac{x^2}{4b}}.$$

Eigenschaften:

- $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$
- Sei f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ sowie f' (bzw. f'') absolut integrierbar, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f'(x)) &= i\omega \mathcal{F}(f(x)) \\ \mathcal{F}(f''(x)) &= -\omega^2 \mathcal{F}(f(x)) \\ \mathcal{F}(x^2 f(x)) &= -\mathcal{F}''(f(x)) \end{aligned}$$
- Sei f, g stückweise stetig sowie beschränkt und absolut integrierbar, so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \\ \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g) \end{aligned}$$
- Weitere nützliche Transformationen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_x) &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) \\ \mathcal{F}(t^2 u_x) &= t^2 \mathcal{F}(u_x) \\ \mathcal{F}(x \cdot y(x))(\omega) &= i \mathcal{F}(y'(x))(\omega) \\ \mathcal{F}(x e^{-a x^2})(\omega) &= \frac{i\omega}{(2a)^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \\ \mathcal{F}^{-1}\left(i\omega e^{-b\omega^2}\right) &= \frac{x}{(2b)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4b}} \\ \mathcal{F}(f(x-a)) &= e^{-i\omega a} \mathcal{F}(f(x)) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega) \\ \mathcal{F}(\omega f(x)) &= i \frac{\partial}{\partial x} f(x) \\ \mathcal{F}(\omega - a) &= \mathcal{F}(e^{i\omega a} f(x)) \end{aligned}$$

• Fourier Transformation der PDE bestimmen:

$$\mathcal{F}(u_t(x, t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2} u_{xx}(x, t)\right) + \mathcal{F}(u(x, t))$$

$$\hat{u}_t(\omega, t) = -\frac{1}{2} \omega^2 \hat{u}(\omega, t) + \hat{u}(\omega, t)$$

$$\mathcal{F}(u(x, 0)) = \hat{u}(\omega, 0) = \mathcal{F}\left(x \cdot e^{-\frac{1}{2} x^2}\right) = \frac{-i\omega}{(2 \cdot 1)^{3/2}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} = -i\omega \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \hat{u}_t = -\frac{1}{2} \omega^2 \hat{u} + \hat{u} \\ \hat{u}(\omega, 0) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2} \omega^2} \end{cases} \quad (\text{ODE für } \hat{u} \text{ in Bezug auf } t)$$

• ODE lösen

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \left(-\frac{1}{2} \omega^2 + 1\right) \hat{u}$$

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = \left(-\frac{1}{2} \omega^2 + 1\right) dt \quad \int$$

$$\ln \hat{u} = \left(-\frac{1}{2} \omega^2 + 1\right) t + D(\omega)$$

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega) \cdot e^{(-\frac{1}{2} \omega^2 + 1)t}$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = C(\omega) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2} \omega^2}$$

$$\hat{u}(\omega, t) = -i\omega \cdot e^{-\frac{1}{2} \omega^2} \cdot e^{(-\frac{1}{2} \omega^2 + 1)t} = -i\omega e^{-\frac{1}{2} \omega^2(1+t)} \cdot e^t$$

• Die Inverse Fourier Transformation bestimmen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(\omega, t)\} = \mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega e^{-\frac{1}{2} \omega^2(1+t)} \cdot e^t\right) = e^t \mathcal{F}^{-1}\left(-i\omega \cdot e^{-\frac{(1+t)}{2} \omega^2}\right) \\ &= e^t \cdot \frac{1}{\left(2 \cdot \frac{1+t}{2}\right)^{3/2}} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1+t}{2}}} = \frac{e^t}{(1+t)^{3/2}} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2(1+t)}} \end{aligned}$$

Tipps Serie 12

1) • Aus welchen zwei "Basisfällen" von A, B, C, D kann man die gegebenen Randbedingungen darstellen?

• Die finale Lösung ist die Superposition der zwei Teilösungen ($\Rightarrow u = u_1 + u_2$)

• Kommt direkt die Formeln aus der ZF verwenden.

2) • Recap: Inhomogene Randbedingungen bei der Wellengleichung

• Ähnlich wie Serie 3) Aufgabe 4

• Identisch wie Beispiel 3) Woche 9

3) • Überprüfe ob $f(x)$ gerade/ungerade ist?

• Bestimme $A(p)$ bzw. $B(p)$.

• Superposition der Lösungen

Formeln:

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] \cdot e^{-c^2 p^2 t} dp$$

$$u(x,0) = \int_0^\infty [A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)] dp = f(x)$$

mit

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(pv) dv$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \sin(pv) dv$$

6.5 Superposition eines Dirichlet Problem

$$\begin{matrix} u(x,y)=f_1(x) \\ u(0,y)=0 \\ u(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(x,y)=f_2(x) \\ u(0,y)=0 \\ u(x,0)=f_2(x) \\ u(x,b)=0 \end{matrix} \quad \oplus \quad \begin{matrix} u(x,y)=0 \\ u(0,y)=f_1(y) \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f_1(y) \end{matrix} \quad \oplus \quad \begin{matrix} u(x,y)=0 \\ u(0,y)=f_2(y) \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f_2(y) \end{matrix}$$

Lösung für A:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Lösung für B:

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Lösung für C:

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Lösung für D:

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$D_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b f_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Lösung für A+B+C+D (=):

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$\equiv$ = wichtig

$\approx$ = hilfreich

$\neq$ = nicht so wichtig

4) Identisch wie Beispiel 4 (Woche 12)

• Fourier Transformation der PDE (nach x)

• Lösen der resultierenden ODE

• Inverse Fourier Transformation der Lösung