

Dirichlet auf symmetrischem Gebiet

Wir wollen die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe lösen anstatt auf dem Rechteck. Hierzu verwenden wir Polarkoordinaten.

Def. $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$

Das Dirichlet Problem wird in Polarkoordinaten wie folgt, ungeschrieben:

Def. Kartesische Koordinaten

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{auf } \{(x,y), \text{ so dass } x^2 + y^2 < R\} \\ u = f & \text{auf } \{(x,y), \text{ so dass } x^2 + y^2 = R\} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_r \frac{1}{r} = 0 & \text{auf } \{(r,\theta), \text{ so dass } 0 \leq r < R, 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ u(R, \theta) = f(\theta) & \text{auf } \{(R, \theta), \text{ so dass } 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die Lösung dieser PDE lässt sich auch mit Separation der Variablen herleiten:

Bestimme die Lösung der PDE

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_r \frac{1}{r} = 0 & \text{auf } \{(r,\theta), \text{ so dass } 0 \leq r < R, 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ u(R, \theta) = f(\theta) & \text{auf } \{(R, \theta), \text{ so dass } 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

① Separation der Variablen: • Wir wählen den Ansatz: $u(r, \theta) = F(r) \cdot G(\theta)$

Setzen Ansatz in die PDE ein: $F''G + \frac{1}{r^2} F\ddot{G} + \frac{1}{r} F'G = 0 \quad | \cdot r^2$

(Kurznotation $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \theta}$)

$$r^2 F''G + F\ddot{G} + r F'G = 0$$

$$(r^2 F'' + r F')G = -F\ddot{G}$$

$$\frac{r^2 F'' + r F'}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = k = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 F'' + r F' - kF = 0 \\ \ddot{G} + kG = 0 \end{cases}$$

• Randbedingungen: Da $\theta=0$ das gleiche ist wie $\theta=2\pi$ können wir die Randbedingungen wie folgt definieren: • $G(0) = G(2\pi)$

$$\bullet \dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$$

Bsp. 1 ② Fallunterscheidung:

$$k=0: \ddot{G}=0 \xrightarrow{\int \int} G(\theta) = A\theta + B$$

$$G(0) = B = G(2\pi) = 2\pi A + B \Rightarrow A=0$$

$$\dot{G}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}(B) = 0 = \dot{G}(2\pi) \Rightarrow G(\theta) = B = \text{const.}$$

$$k < 0: \ddot{G} = +|k|G \xrightarrow{\text{ODE mit konstanten Koeffizienten}} G(\theta) = C \cdot e^{\sqrt{|k|}\theta} + D \cdot e^{-\sqrt{|k|}\theta}$$

$$\text{Randbedingungen: } \text{I } G(0) = C + D = C e^{\sqrt{|k|}2\pi} + D e^{-\sqrt{|k|}2\pi} = G(2\pi)$$

$$\text{II } \dot{G}(0) = C\sqrt{|k|} - D\sqrt{|k|} = \sqrt{|k|} e^{\sqrt{|k|}2\pi} C - \sqrt{|k|} e^{-\sqrt{|k|}2\pi} D =$$

$$\text{I} + \frac{1}{|k|} \text{II} : 2C = 2C e^{\sqrt{|k|}2\pi} \xrightarrow{k < 0} C = 0$$

$$G(0) = D = D e^{-\sqrt{|k|}2\pi} = G(2\pi) \xrightarrow{k < 0} D = 0$$

$\Rightarrow$ triviale Lösung

$$k > 0: \quad \ddot{G} = -kG \quad G(\theta) = E \cos(\sqrt{k} \theta) + H \sin(\sqrt{k} \theta)$$

$$F G(0) = E \cdot 1 + H \cdot 0 = E = E \cos(\sqrt{k} 2\pi) + H \sin(\sqrt{k} 2\pi) = G(2\pi)$$

$$F \dot{G}(0) = -\sqrt{k} E \cdot 0 + \sqrt{k} H \cdot 1 = \sqrt{k} H = -\sqrt{k} E \sin(\sqrt{k} 2\pi) + H \sqrt{k} \cos(\sqrt{k} 2\pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} I \cdot H : H E = H E \cdot \cos(\sqrt{k} 2\pi) + H^2 \sin(\sqrt{k} 2\pi) \\ II \cdot E \frac{1}{\sqrt{k}} : H E = -E^2 \sin(\sqrt{k} 2\pi) + H E \cdot \cos(\sqrt{k} 2\pi) \end{array} \right\} \theta \Rightarrow 0 = H^2 \sin(\sqrt{k} 2\pi) + E^2 \sin(\sqrt{k} 2\pi) = (H^2 + E^2) \sin(\sqrt{k} 2\pi)$$

$$(H^2 + E^2) = 0 \Rightarrow \text{Für } H=E=0 \Rightarrow \text{triviale Lösung oder } \sin(\sqrt{k} 2\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{k} \in \mathbb{N}$$

$$G_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \quad \text{für } n=0 \text{ erhalten wir für } G_0 \text{ eine Konstante } (G_0 = A_0). \text{ Das wäre die gleiche Lösung welche wir für } k=0 \text{ erhalten.} \quad \hookrightarrow \sqrt{k} = n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Für die zweite ODE erhalten wir: } r^2 F'' + r F' - n^2 F = 0 \quad (\text{Euler Dgl}) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F'' + \frac{F'}{r} + n^2 \frac{F}{r^2} = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) + 1\alpha + n^2 = 0 \quad (\text{Index Polynom})$$

$$\alpha^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$$

$$\hookrightarrow F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$$

23.8 Eulersche DGL n-ter Ordnung

$$a_n y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = 0$$

1. Setze $y = x^\alpha$

2. Finde das Indexpolynom:

$$\dots + a_3(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha + a_2\alpha(\alpha-1) + a_1\alpha + a_0 = 0$$

3. Finde Nullstellen des Indexpolynoms

3.1 Ist α eine k-fache reelle Nullstelle:

$$x_1 \rightarrow x^\alpha, x_2 \rightarrow \ln(x) \cdot x^\alpha, \dots, x_k \rightarrow (\ln(x))^{k-1} \cdot x^\alpha$$

3.2 Ist $\alpha = a + ib, \bar{\alpha} = a - ib, b \neq 0$ ein Paar konj. kompl. k-facher Nullstellen:

$$x_1 \rightarrow x^\alpha \cos(b \cdot \ln x)$$

$$x_2 \rightarrow x^\alpha \sin(b \cdot \ln x)$$

$$x_3 \rightarrow (\ln x) x^\alpha \cos(b \cdot \ln x) \quad ; \quad x_4 \rightarrow (\ln x) x^\alpha \sin(b \cdot \ln x)$$

$$x_{k-1} \rightarrow (\ln x)^{k-1} x^\alpha \cos(b \cdot \ln x); x_k \rightarrow (\ln x)^{k-1} x^\alpha \sin(b \cdot \ln x)$$

$$4. y_h(x) = A \cdot x_1 + B \cdot x_2 + \dots + Z \cdot x_n$$

Bsp.1

Da die Lösung im Gebiet beschränkt sein muss, setzen

wir $Q_n = 0$. Denn für $r \rightarrow 0$ strebt der Term $Q_n r^{-n} \rightarrow \infty$

$\hookrightarrow$ Somit ist die Lösung innerhalb der Scheibe beschränkt

$\rightarrow$ Falls auch die Lösung ausserhalb der Scheibe beschränkt ist, dann gilt $P_n = 0$, da für $r \rightarrow \infty$ $P_n r^n \rightarrow \infty$

$$u_n(r, \theta) = F_n G_n = r^n \underbrace{(A_n \cos(n\theta))}_{A_n \cdot P_n} + \underbrace{B_n \sin(n\theta)}_{B_n \cdot Q_n}$$

$$\textcircled{3} \text{ Superposition: } u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

$$\text{Wir haben folgendes Anfangswertproblem: } f(\theta) = u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten der 2 π -periodischen Fortsetzung erhalten wir:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\phi) d\phi \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi$$

Wenn wir A_0, A_n, B_n einsetzen in $u(r, \theta)$ erhalten wir den Poisson-Integral-Form:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2}}_{\text{Kernel } K(r, \theta, R, \phi)} f(\phi) d\phi$$

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u(R, \theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Def.

• Für die Koeffizienten gilt: $u(R, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \sim \text{Koeffizientenvergleich}$

• Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2 π -periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\phi) d\phi \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi$$

$$\rightarrow \text{Poisson-Integral-Form: } u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta, R, \phi) f(\phi) d\phi \quad \text{mit } K(r, \theta, R, \phi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} \quad \text{Poisson-Integral-Kernel}$$

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u(R, \theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

Def.

- Für die Koeffizienten gilt: $u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$ ~ Koeffizientenvergleich
- Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2π -periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:
 A_0 nicht näher bestimmbar $A_n = \frac{1}{nR^{n+1/2}} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot \cos(n\phi) d\phi$ $B_n = \frac{1}{nR^{n+1/2}} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi$

Bestimme die Lösung der Laplacegleichung einer Einheitskreisscheibe, wobei auf den Rand gilt: $u_r(1, \theta) = \cos(2\theta) + 3 \sin(3\theta)$

Bsp. 2

Bestimme die zeitlich konstante Lösung u der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung ($u_t = 0$) auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$, wobei die Temperatur auf dem Rand durch $u(x, y) = x \cdot y$ gegeben ist.

Bsp. 3

Harmonische Funktionen

Def. Die Funktionen, die die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, werden harmonische Funktionen genannt. Für alle harmonischen gelten wichtige Eigenschaften: $\rightarrow$ Ohne die allgemeine Lösung zu kennen, kann man bereits Aussagen über spezielle Werte der Lösungsfunktionen machen $\Rightarrow$ Maximumsprinzip & Mittelwertsatz

Maximumsprinzip

Def. Für harmonische Funktionen gilt:
 $\rightarrow$ Maximum & Minimum befinden sich immer auf dem Rand ∂S
 $\rightarrow$ D.h. im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktionen nie ihr Minimum oder Maximum an, ausser sie ist konstant.

Mittelwertsatz

Sei u eine harmonische Funktion auf dem Gebiet S . Sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt im Gebiet in S und sei $a \in \mathbb{R}$ der Radius einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt welcher komplett in S enthalten ist:

$\Rightarrow$ Dann ist u auch eine Lösung des Dirichlet-Problem (Kreisscheibe)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \{(r, \theta): 0 \leq r < a, 0 \leq \theta < 2\pi\} \\ u = u(a, \theta) & \text{auf } \{(r, \theta): r = a, 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die Lösung u können wir mit dem Poisson-Integral bestimmen: $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta, a, \varphi) u(a, \varphi) d\varphi$

Wenn wir jetzt den Wert von u an der Stelle (x_0, y_0) berechnen wollen, können wir (x_0, y_0) in Polarkoordinaten darstellen.

Hierbei wird $r = \theta$ und θ kann beliebig gewählt werden. Wenn wir dies nun ins Poisson-Integral einsetzen, kriegen wir:

$$u(x_0, y_0) = u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(0, \theta, a, \varphi) u(a, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - 0^2}{a^2 - 2 \cdot 0 \cdot a \cdot \cos(\theta - \varphi) + 0^2} \cdot u(a, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) d\varphi$$

Def. Eine harmonische Funktionen ist an jeden beliebigen Punkt (x_0, y_0) gleich dem Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Punkt

$$u(x_0, y_0) = u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + a \cos \varphi, y_0 + a \sin \varphi) d\varphi$$

Well-posed & Ill-posed Problems

- Für ODE's kann man die Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen eines Anfangswertproblems, sowie die Abhängigkeit der Anfangsbedingungen beweisen
- Für PDE's geht das in der Regel nicht einfach. Wir unterscheiden zwischen well-posed und ill-posed

Def. well-posed: 1) Existenz: Das Problem hat eine Lösung
2) Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig
3) Stabilität: Die Lösung ist von Anfangsbedingungen & Randbedingungen abhängig
ill-posed: Falls einer dieser Bedingungen nicht erfüllt wird

Neumann-Problem

Wir haben ein spezifisches Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial R \end{cases}$$

Wir haben also eine Randbedingung bezüglich der Ableitung senkrecht zum Rand. Wir schauen uns dieses Beispiel an um die 'well-posedness' der PDE's zu untersuchen.

Def.

Um eine zwingende Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

Da u eine Lösung der Laplace Gleichung ist, muss $\Delta u = 0$ gelten. Deshalb muss die Randbedingung folgendes Kriterium erfüllen: $\int_{\partial R} g \stackrel{!}{=} 0$

Das Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\partial R} g \neq 0$

Tipps Serie 13

1) a) Gleichung in Polarkoordinaten umwandeln $\rightarrow$ Formel:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$\equiv$ = wichtig

$\equiv$ = hilfreich

$\equiv$ = nicht so wichtig

b) Löse die Laplace-Gleichung mit der allg. Lösung $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$

• Bestimme die Koeffizienten mit Koeffizientenvergleich. Verwende Hint: $\cos^3(r) = \frac{3}{4} \cos(r) + \frac{1}{4} \cos(3r)$

c) Um die Lösung zu bestimmen: • Verwende Hint: $\cos^3(r) = \frac{3}{4} \cos(r) + \frac{1}{4} \cos(3r)$

• Danach: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow$ wir brauchen $\cos r$ oder $\sin r$ um kartesische Koordinaten zu erhalten

2) a) • Löse die Laplace-Gleichung mit der allg. Lösung $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$

• Bestimme die Koeffizienten mit Koeffizientenvergleich. Verwende Hint: $\sin^2(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2r)$

b) • Bestimme das Maximum abhängig von jeweils θ und r in dem Bereich (Bemerkung: Maximumprinzip)

3) a) • Kreisscheibe ist wie folgt definiert: $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta, 2\pi\} \rightarrow$ Kreis mit $r=1$

• u ist konstant gleich 1 $\rightarrow$ Welchen Wert hat $\underbrace{u(1, \theta)}_{\text{Randbedingung}} = ?$

• Können wir daraus ein Dirichlet Problem formulieren? Falls ja $\Rightarrow$ Poisson-Integral

$\rightarrow$ Poisson-Integral-Form: $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta, \varphi) f(\varphi) d\varphi$ mit $K(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2}$

b) • Verwendet: Poisson-Integral

$\rightarrow$ Poisson-Integral-Form: $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta, \varphi) f(\varphi) d\varphi$ mit $K(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2}$

• Frage: lässt sich $\frac{5}{9} \sin(4\theta)$ in $\cos^3(\varphi) \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) \cos(\varphi)$ umschreiben?

• Ritzliche $\sin(4\alpha) = 2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)$

• remember: Am Rand $r=1$: $\sin(\alpha) = y$; $\cos(\alpha) = x$

4) • Das Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\partial D} g \neq 0$ (siehe. Def Neumann-Problem)

$\rightarrow$ Zeige wieso das gilt (siehe Def.)

• Bestimme $\int_{\partial D} g$ und überprüfe ob es ungleich null ist.