Dirichlet auf symmetrischen Gebiet

Wir wollen die Laplace-Gleichung auf einer Kreisscheibe lösen anstatt auf den Rechteck. Hierzu verwenden wir Polarkoordinaten.

Def.
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Das Dirichlet Problem wird in Polarkoordinaten wie folgt, umgeschrieben:

Def. Kartesische Koordinaten

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{auf } \{(x,y) \text{, so dass } x^2+y^2 < R\} \\ u = f & \text{auf } \{(x,y) \text{, so dass } x^2+y^2 = R\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_r \frac{1}{r} = 0 & \text{auf } \{(r,\theta) \text{, so dass } 0 \le r < R,\ 0 \le \theta < 2\pi\} \\ u(R,\theta) = f(\theta) & \text{auf } \{(R,\theta) \text{, so dass } 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die Lösung dieser PDE lässt sich auch mit Separation der Variabeln herleiten:

Bsp. 1 Bestimme die Lösung der PDE

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_r \frac{1}{r} = 0 & \text{auf } \{(r,\theta) \text{, so dass } 0 \le r < R,\ 0 \le \theta < 2\pi\} \\ u(R,\theta) = f(\theta) & \text{auf } \{(R,\theta) \text{, so dass } 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

① Separation der Variabeln: • Wir wählen den Ansatz: $u(r,\theta) = F(r)\cdot G(\theta)$

Setzen Ansatz in die PDE ein: $F''G + \frac{1}{r^2}F\ddot{G} + \frac{1}{r}F'G = 0 \quad |\cdot r^2$

(Kurznotation $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}$ $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$)

$$r^2F''G + F\ddot{G} + rF'G$$

$$(r^2F'' + rF')G = -F\ddot{G}$$

$$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = k = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2F'' + rF' - kF = 0 \\ \ddot{G} + kG = 0 \end{cases}$$

• Randbedingungen: Da $\theta = 0$ das gleiche ist wie $\theta = 2\pi$ können wir die Randbedingungen wie folgt definieren: • $G(0) = G(2\pi)$
• $\dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$

② Fallunterscheidung:

$k=0$: $\ddot{G} = 0 \overset{\int\int d\theta d\theta}{\Longrightarrow} G(\theta) = A\theta + B$

$G(0) = \cancel{B} = G(2\pi) = 2\pi A + \cancel{B} \Rightarrow A = 0$

$\dot{G}(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(B) = 0 = \dot{G}(2\pi) \Rightarrow G(\theta) = B = \text{const.}$

$k<0$: $\ddot{G} = +|k|G \overset{\text{ODE}}{\underset{\text{mit konstanten Koeffizienten}}{\Longrightarrow}} G(\theta) = C\cdot e^{\sqrt{|k|}\theta} + De^{-\sqrt{|k|}\theta}$

Randbedingungen: I $G(0) = C + D = Ce^{\sqrt{|k|}2\pi} + De^{-\sqrt{|k|}2\pi} = G(2\pi)$

II $\dot{G}(0) = C\sqrt{|k|} - D\sqrt{|k|} = \sqrt{|k|}e^{\sqrt{|k|}2\pi} - \sqrt{|k|}e^{-\sqrt{|k|}2\pi} =$

$\text{I} + \frac{1}{\sqrt{|k|}}\text{II}$: $2C = 2Ce^{\sqrt{|k|}2\pi} \overset{k<0}{\Rightarrow} C = 0$

$G(0) = D = De^{-\sqrt{|k|}2\pi} = G(2\pi) \overset{k<0}{\Longrightarrow} D = 0$

$\Rightarrow$ triviale Lösung

$k>0: \quad \ddot{G} = -kG \qquad G(\theta) = E\cos(\sqrt{k}\,\theta) + H\sin(\sqrt{k}\,\theta)$

$I \quad G(0) = E\cdot 1 + H\cdot 0 = E = E\cos(\sqrt{k}\,2\pi) + H\sin(\sqrt{k}\,2\pi) = G(2\pi)$

$II \quad \dot{G}(0) = -\sqrt{k}E\cdot 0 + \sqrt{k}H\cdot 1 = \sqrt{k}H = -\sqrt{k}E\sin(\sqrt{k}\,2\pi) + H\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\,2\pi)$

$$\left.\begin{array}{ll} I\cdot H: & HE = HE\cdot\cos(\sqrt{k}\,2\pi) + H^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi) \\ II\cdot E\,\frac{1}{\sqrt{k}}: & HE = -E^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi) + HE\cdot\cos(\sqrt{k}\,2\pi) \end{array}\right\} \ominus \Rightarrow 0 = H^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi) + E^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi) = (H^2+E^2)\sin(\sqrt{k}\,2\pi)$$

$(H^2+E^2) = 0 \Rightarrow$ Für $H=E=0 \Rightarrow$ triviale Lösung oder $\sin(\sqrt{k}\,2\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{k} \in \mathbb{N}$

↳ $\sqrt{k} = n \quad n\in\mathbb{N}$

$G_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$

für $n=0$ erhalten wir für G_0 eine Konstante ($G_0 = A_0$). Das wäre die gleiche Lösung welche wir für $k=0$ erhalten

Für die zweite ODE erhalten wir: $r^2F'' + rF' - n^2F = 0$ (Eulers DGL) mit $n = 0,1,2\ldots$

$F'' + \frac{F'}{r} + n^2\frac{F}{r^2} = 0$

$\alpha(\alpha-1) + 1\alpha + n^2 = 0$ (Index Polynom

$\alpha^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$

↳ $F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$

23.8 Eulersche DGL n-ter Ordnung

$a_n y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x}y^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}}y' + \frac{a_0}{x^n}y = 0$

1. Setze $y = x^\alpha$
2. Finde das Indexpolynom: $\ldots + a_3(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha + a_2\alpha(\alpha-1) + a_1\alpha + a_0 = 0$
3. Finde Nullstellen des Indexpolynoms
   3.1 Ist α eine k-fache reelle Nullstelle:
   $x_1 \to x^\alpha, x_2 \to \ln(x)\cdot x^\alpha, \ldots, x_k \to (\ln(x))^{k-1}\cdot x^\alpha$
   3.2 Ist $\alpha = a+ib, \bar{\alpha} = a-ib, b\neq 0$ ein Paar konj. kompl. k-facher Nullstellen:
   $x_1 \to x^\alpha\cos(b\cdot\ln x)$
   $x_2 \to x^\alpha\sin(b\cdot\ln x)$
   $x_3 \to (\ln x)x^\alpha\cos(b\cdot\ln x) \quad ; \quad x_4 \to (\ln x)x^\alpha\sin(b\cdot\ln x)$
   $x_{k-1} \to (\ln x)^{k-1}x^\alpha\cos(b\cdot\ln x); x_k \to (\ln x)^{k-1}x^\alpha\sin(b\cdot\ln x)$
4. $y_h(x) = A\cdot x_1 + B\cdot x_2 + \ldots + Z\cdot x_n$

Bsp. 1

Da die Lösung im Gebiet beschränkt sein muss, setzen wir $Q_n = 0$. Denn für $r\to 0$ strebt der Term $Q\cdot r^{-n}\to\infty$

↳ Somit ist die Lösung innerhalb der Scheibe beschränkt

→ Falls aber die Lösung ausserhalb der Scheibe beschränkt ist, dann gilt $P_n = 0$, da für $r\to\infty$ $P_n r^n\to\infty$

$u_n(r,\theta) = F_nG_n = r^n(\underbrace{A_n}_{A_n\cdot P_n}\cdot\cos(n\theta) + \underbrace{B_n}_{B_n\cdot P_n}\sin(n\theta))$

③ Superposition: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$

Wir haben folgendes Anfangswertproblem: $f(\theta) = u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$

Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung erhalten wir:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi \qquad A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi \qquad B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi$$

Wenn wir A_0, A_n, B_n einsetzen in $u(r,\theta)$ erhalten wir den Poisson-Integral-Form:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}}_{\text{Kernel } K(r,\theta,R,\phi)} f(\phi)\,d\phi$$

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u(R,\theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

Def.

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

- Für die Koeffizienten gilt: $u(R,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))$ ⇝ Koeffizientenvergleich
- Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi \qquad A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\cos(n\phi)\,d\phi \qquad B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi$$

→ Poisson-Integral-Form: $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)\,f(\phi)\,d\phi$ mit $K(r,\theta,R,\varphi) = \overbrace{\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}}^{\text{Poisson-Integral-Kernel}}$

Für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf der geschlossenen Kreisscheibe D mit der Randbedingung $u_r(R,\theta) = f(\theta)$, erhalten wir:

Def.

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

- Für die Koeffizienten gilt: $u_r(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1} n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$ ~ Koeffizientenvergleich
- Sonst kann man die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von $f(\theta)$ und kompensiert R^n in der Formel:

A_0 nicht näher bestimmbar $\quad A_n = \frac{1}{n R^{n-1} \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot \cos(n\phi)\, d\phi \quad B_n = \frac{1}{n R^{n-1} \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi)\, d\phi$

Bsp. 2

Bestimme die Lösung der Laplacegleichung einer Einheitskreisscheibe, wobei auf den Rand gilt: $u_r(1,\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$

Formel: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$

$$u_r(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \cancel{1^{n-1}} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$$

Koeffizientenvergleich: $u_r(1,0) = \cancel{A_1}^{0} \cos(\theta) + \cancel{B_1}^{0} \sin(\theta) + 2\underset{1/2}{A_2} \cos(2\theta) + 2\cancel{B_2}^{0} \sin(2\theta) + 3\cancel{A_3}^{0} \cos(3\theta) + 3\underset{1}{B_3} \sin(3\theta) = \cos(2\theta) + 3\sin(3\theta)$

$$A_n = \begin{cases} C & n=0 \quad C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & n=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} 1 & n=3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(r,\theta) = \frac{r^2}{2}\cos(2\theta) + r^3 \sin(3\theta) + C$$

Bsp. 3

Bestimme die zeitlich konstante Lösung u des zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung $(u_t = 0)$ auf $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$, wobei die Temperatur auf dem Rand durch $u(x,y) = x \cdot y$ gegeben ist.

Da die Lösung zeitlich konstant ist, gilt: $u_t = 0$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } D \\ u(x,y) = xy & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

① In Polarkoordinaten aufschreiben:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r = 0 & \text{auf } \{(r,\theta) : 0 \leq r < 4,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ u(4,\theta) = 16 \cos\theta \sin\theta & \text{auf } \{(R,\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

② Koeffizienten berechnen: • Allg. Lösung: $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cdot \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$

- Randbedingung: $u(4,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right) = 16 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \overset{\text{trig. Identität}}{=} 8 \sin(2\theta)$
- Koeffizientenvergleich: $u(4,0) = \cancel{\ldots}^{0} + 4^2 B_2 \sin(2\theta) + \cancel{\ldots}^{0} = 8\sin(2\theta) \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2}$

$$A_n = 0 \qquad B_n = \begin{cases} 1/2 & n=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in allgemeine Formel: $u(r,\theta) = r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\theta)$

Harmonische Funktionen

Def. Die Funktionen, die die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, werden harmonische Funktionen genannt. Für alle harmonischen gelten wichtige Eigenschaften: → Ohne die allgemeine Lösung zu kennen, kann man bereits Aussagen über spezielle Werte der Lösungsfunktionen machen ⇒ Maximumsprinzip & Mittelwertsatz

Maximumsprinzip

Def. Für harmonische Funktionen gilt:

Skizze:

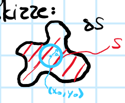
→ Maximum & Minimum befinden sich immer auf den Rand ∂S

→ D.h. im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktionen nie ihr Minimum oder Maximum an, ausser sie ist konstant.

Mittelwertsatz

Sei u eine harmonische Funktion auf den Gebiet S. Sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt im Gebiet in S und sei $a \in \mathbb{R}$ der Radius einer Kreisscheibe mit den Mittelpunkt welcher komplett in S enthalten ist:

Skizze:



⇒ Dann ist u auch eine Lösung des Dirichlet-Problem (Kreisscheibe)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \{(r,\theta): 0 \le r < a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\} \\ u = u(a,\theta) & \text{auf } \{(r,\theta): r = a,\ 0 \le \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

Die Lösung u können wir mit dem Poisson-Integral bestimmen: $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,a,\varphi)\, u(a,\varphi)\, d\varphi$

Wenn wir jetzt den Wert von u an der Stelle (x_0,y_0) berechnen wollen, können wir (x_0,y_0) in Polarkoordinaten darstellen.

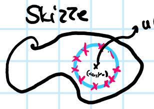
Hierbei wird $r = 0$ und θ kann beliebig gewählt werden. Wenn wir dies nun ins Poisson-Integral einsetzen, kriegen wir:

$$u(x_0,y_0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(0,\theta,a,\varphi)\, u(a,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - 0^2}{a^2 - 2\cdot 0\cdot a\cdot\cos(\theta-\varphi) + 0^2}\cdot u(a,\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi)\, d\varphi$$

Def. Eine harmonische Funktionen ist an jeden beliebigen Punkt (x_0,y_0) gleich den Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Punkt

$$u(x_0,y_0) = u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + a\cos\varphi,\ y_0 + a\sin\varphi)\, d\varphi$$

Skizze



$u(x_0,y_0)$ = Mittelwert von allen Punkten auf diesem Kreis

Well-posed & Ill-posed Problems

- Für ODE's kann man die Eindeutigkeit und Existenz der Lösungen eines Anfangswertproblems, sowie die Abhängigkeit der Anfangsbedingungen beweisen
- Für PDE's geht das in der Regel nicht einfach. Wir unterscheiden zwischen well-posed und ill-posed

Def.

well-posed: 1) Existenz: Das Problem hat eine Lösung

2) Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig

3) Stabilität: Die Lösung ist von Anfangsbedingungen & Randbedingungen abhängig

ill-posed: Falls einer dieser Bedingung nicht erfüllt wird

Neumann-Problem

Wir haben ein spezifisches Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } R \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial R \end{cases}$$

Wir haben also eine Randbedingung bezüglich zur Ableitung senkrecht zum Rand. Wir schauen uns dieses Beispiel an um die "well-posedness" der PDE's zu untersuchen.

Def.

Um eine zwingende Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

$$\int_{\partial R} g \overset{BC}{=} \int_{\partial R} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial R} \nabla u \cdot n \overset{Gauss}{=} \int_R \operatorname{div}(\nabla u) = \int_R \Delta u = 0$$

Da u eine Lösung der Laplace Gleichung ist, muss $\Delta u = 0$ gelten. Deshalb muss die Randbedingung folgendes Kriterium erfüllen: $\int_{\partial R} g \overset{!}{=} 0$

Das <u>Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\partial R} g \neq 0$</u>

Tipps Serie 13

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) Gleichung in Polarkoordinaten umwandeln → Formel: $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$

b) · Löse die Laplace-Gleichung mit der allg. Lösung $\boxed{u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)}$

· Bestimme die Koeffizienten mit Koeffizientenvergleich. Verwende Hint: $\cos^3(\gamma) = \frac{3}{4}\cos(\gamma) + \frac{1}{4}\cos(3\gamma)$

c) · Um die Lösung zu bestimmen: · Verwende Hint: $\cos^3(\gamma) = \frac{3}{4}\cos(\gamma) + \frac{1}{4}\cos(3\gamma)$

· Danach: $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$ ↳ wir brauchen $\cos r$ oder $\sin r$ um kartesische Koordinaten zu erhalten

2) a) · Löse die Laplace-Gleichung mit der allg. Lösung $\boxed{u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)}$

· Bestimme die Koeffizienten mit Koeffizientenvergleich. Verwende Hint: $\sin^2(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2r)$

b) · Bestimme das Maximum abhängig von jeweils θ und r in dem Bereich (Bemerkung: Maximumprinzip)

3) a) · Kreisscheibe ist wie folgt definiert: $D = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta, 2\pi\}$ → Kreis mit $r=1$

· u ist konstant gleich 1 ⇝ Welchen Wert hat $\underbrace{u(1,\theta)}_{\text{Randbedingung}} = ?$

· Können wir daraus ein Dirichlet Problem formulieren? Falls ja ⇒ Poisson-Integral

> Poisson-Integral-Form: $\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi \quad \text{mit } K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}}$

b) · Verwendet: Poisson-Integral

> Poisson-Integral-Form: $\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\theta,R,\varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi \quad \text{mit } K(r,\theta,R,\varphi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}}$

· Frage: lässt sich $\frac{r^4}{4}\sin(4\theta)$ in $\cos^3(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)\cos(\varphi)$ umschreiben?

· Nützlich: $\sin(4\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)$

· remember: Am Rand $r=1$: $\sin(\alpha) = y$; $\cos(\alpha) = x$

4) · Das Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\partial\Omega} g \neq 0$ (siehe. Def Neumann-Problem)

↳ Zeige wieso das gilt (siehe Def.)

· Bestimme $\int_{\partial\Omega} g$ und überprüfe ob es ungleich null ist.