

Recap: PDE



Exam	Classification	1D Wave	1D Heat	Laplace
W 17		D'Alembert, Fourier Series Solution		Rectangle via Sep. of Variables
S 17		D'Alembert	Sep. of Variables	Rectangle w. inhom. BCs
W 18	x	D'Alembert	Infinite Bar via general solution	Rectangle via Sep. of Variables
S 18		D'Alembert	Infinite Bar via Fourier Int., inhom. BCs	
W 19		D'Alembert, Inhom. BCs	Sep. of Variables	Max. Principle
S 19	x	D'Alembert, Sep. of Variables	Infinite Bar via Fourier Transform	Mean Value, Max. Principle
W 20	x	D'Alembert	Sep. of Variables	Mean Value, Max. Principle
S 20		D'Alembert	Sep. of Variables	
W 21	x	D'Alembert, Fourier Series Solution		Rectangle
S 21		D'Alembert, Sep. of Variables, Fourier Series Solution		
W 22	x	D'Alembert		Inhom. BCs, Fourier Transform (different PDE)
S 22		D'Alembert, Inhom. BCs	Sep. of Variables	
W 23	x	D'Alembert, Fourier Series Solution	Sep. of Variables	Well-posed/III-posed, Max. Principle
S 23	x	D'Alembert, Fourier Series Solution	Sep. of Variables	Well-posed/III-posed, Max. Principle
W 24	x	D'Alembert, Fourier Transform (PDE)	Sep. of Variables	Well-posed/III-posed, Max. Principle
S24	x	D'Alembert, inhom. BCs		Well-posed/III-posed, Max. Principle, Rectangle

Charakterisierung einer PDE

Eine PDE ist...

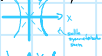
- ↳ linear, falls die gesuchte Funktion und die Ableitungen nur linear in der Gleichung vorkommen
- ↳ homogen, falls die Gleichung nur die gesuchte Funktion oder einer der partiellen Ableitungen besitzt und linear ist
- ↳ n. te-Ordnung, wobei n die höchste Ableitung der unbekannten Funktion darstellt.

Klassifizierung von linearen PDE's 2. Ordnung

Betrachten wir eine lineare PDE zweiter Ordnung von einer Funktion $u(x,y)$ in der folgenden Form:

$$A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x,y, u, u_x, u_y)$$

→ hyperbolisch: $AC - B^2 < 0$



→ parabolisch: $AC - B^2 = 0$



→ elliptisch: $AC - B^2 > 0$



→ mixed type: Da A, B, C Funktionen von den Variablen (x,y) sein können, kann sich der Typ der PDE sich je nach den Werten (x,y) möglicherweise ändern.

D'Alembert Lösung

Falls man zusätzlich zwei Anfangswertbedingungen berücksichtigt, erhält man das Cauchy Problem und der dazugehörigen D'Alembert Lösung

Def.
$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad (\text{Cauchy Problem})$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Wir haben hier keine Randbedingung. Das heißt die Welle kann sich also bei dieser Lösung ausbreiten 'frei' im Raum bewegen.

Maximumsprinzip

Für harmonische Funktionen gilt

- Def. → Maximum & Minimum befinden sich inner auf dem Rand ∂S
→ D.h. im Inneren des Gebiets S sind eine harmonische Funktionen nie ihr Minimum oder Maximum an, außer sie ist konstant.



Mittelwertsatz

Eine harmonische Funktionen ist an jedem beliebigen Punkt (x_0, y_0) gleich dem Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Punkt

Def.
$$u(x_0, y_0) = u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + a \cos \varphi, y_0 + a \sin \varphi) d\varphi$$



Neumann-Problem

Wir haben ein spezifisches Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ auf } \partial \mathbb{R} \end{cases}$$

Wir haben also eine Randbedingung bezüglich zur Ableitung senkrecht zum Rand. Wir schauen uns dieses Beispiel an um die 'well-posedness' der PDE's zu untersuchen.

Def. Um eine zugehörige Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\mathbb{R}} \nabla u \cdot \mathbf{n} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\mathbb{R}} \text{div}(\nabla u) = \int_{\mathbb{R}} \Delta u = 0$$

Da u eine Lösung der Laplace Gleichung ist, muss $\Delta u = 0$ gelten. Deshalb muss die Randbedingung folgendes Kriterium erfüllen: $\int_{\mathbb{R}} g = 0$

Das Neumann-Problem ist ill-posed für $\int_{\mathbb{R}} g \neq 0$

Quizfrage 1

1.MC6 [3 Points] Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(t, x, y)$:

$$u_t u_{xyy} + 4u_{xx} = 4u_{yy} - 3x^2 + y.$$

Is this PDE linear? Homogeneous? And what is the order of the PDE?

- (A) It is a non linear and homogeneous third order PDE.
- (B) It is a linear and homogeneous fourth order PDE.
- (C) It is a non linear and non homogeneous fourth order PDE.
- ☒ (D) It is a non linear and non homogeneous third order PDE.

- Is this PDE linear? $\rightarrow$ non-linear with respect to u due to the $u_t \cdot u_{xyy}$ term
- Is this PDE homogeneous? $\rightarrow$ not homogeneous with respect to u due to $-3x^2 + y$ term
 $\hookrightarrow$ term not containing u present? No $\rightarrow$ not homogeneous
- What is the order of the PDE? The highest derivative is u_{xyy} and therefore the PDE is of order 3

Quizfrage 2

1.MC6 [3 Points] Consider the following PDE (partial differential equation) for the function $u = u(x, y)$:

$$u_{xx} + 2\cos(x)u_{xy} + yu_{yy} - u_x + u_y = \sin(x).$$

Is the PDE hyperbolic, parabolic, elliptic or of mixed type?

- (A) hyperbolic.
- (B) parabolic.
- (C) elliptic.
- ☒ (D) mixed type.

- Allgemeine Form: $A u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$
 $1 \cdot u_{xx} + 2 \cdot \cos(x) u_{xy} + y \cdot u_{yy} = u_x + u_y + \sin(x)$
- $\Rightarrow A = 1; B = \cos(x); C = y$
- $\rightarrow AC - B^2 = y - \cos(x)^2 \rightarrow$ sign swap possible $\Rightarrow$ mixed type

Quizfrage 3

1.MC7 [3 Points] Wave equation with D'Alembert solution.

Consider the following wave equation with $c = 1$,

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 4x^2 - 2, & x \in (0, 2), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, 2), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Find the solution at position $x = 1$ and time $t = 10$, i.e. $u(1, 10)$.

(A) $u(1, 10) = \frac{1030}{3}$.

(B) $u(1, 10) = \frac{2060}{3}$.

(C) $u(1, 10) = \frac{2}{3}$.

(D) $u(1, 10) = \frac{4}{3}$.

Formel:

$$u(x, t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

$$\begin{aligned} u(1, 10) &= \frac{1}{2} [f(1+1 \cdot 10) + f(1-10)] + \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \int_{1-10}^{1+10} g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [f(11) + f(-9)] + \frac{1}{2} \int_{-9}^{11} g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [0 + 0] + \frac{1}{2} \int_0^2 s^2 ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} s^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Quizfrage 4

1.MC7 [3 Points] Wave equation with D'Alembert solution.

Consider the following wave equation:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = e^{2x}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Find the value of the solution u at position $x = 0$, i.e. $u(0, t)$

(A) $u(0, t) = \cos(2ct)$.

(B) $u(0, t) = \sin(2ct)$.

(C) $u(0, t) = \sinh(2ct)$.

(D) $u(0, t) = \cosh(2ct)$.

Formel:

$$u(x, t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{1}{2} [f(0+ct) + f(0-ct)] + \frac{1}{2 \cdot c} \cdot \int_{0-ct}^{0+ct} g(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [f(ct) + f(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} 0 ds \\ &= \frac{1}{2} [e^{2ct} + e^{-2ct}] = \underline{\underline{\cosh(2ct)}} \end{aligned}$$

Quizfrage 5

1.MC8 [3 Points] Let $u = u(x, y)$ be a harmonic function in D_2 the disk of radius 2 centred at 0. The maximum value of u is at $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, i.e. $\max_{D_2} u(x, y) = u(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Which of the following statements is true?

- (A) u is not constant in D_2 .
- (B) u is constant in D_2 .
- (C) There exists another point (x', y') in D_2 such that $u(x, y) = u(x', y')$.
- (D) We cannot conclude that (A), (B) and (C) are true for every u .

Für harmonische Funktionen gilt:

→ Maximum & Minimum befinden sich immer auf dem Rand ∂S

→ D.h. im Innern des Gebiets S nimmt eine harmonische Funktion nie ihr Minimum oder Maximum an, aussere sie ist konstant.



→ Maximum does lay on the boundary of D_2 hence we can't conclude anything about u .

Quizfrage 6

1.MC8 [3 Points] Let $u(x, y) = e^{-((x-1)^2 + (y-1)^2)}$. The maximum value of u in the disk of radius 4 centred at 0, denoted by D_4 , is at the point $(x, y) = (1, 1)$. That is

$$\max_{D_4} u(x, y) = u(1, 1).$$

Which of the following statements is true?

- (A) u is not constant in D_4 .
- (B) u is constant in D_4 .
- (C) The minimum of u is at the point $(x, y) = (-1, -1)$
- (D) We cannot conclude that (A), (B) and (C) are true.

→ $u(x, y) = e^{-((x-1)^2 + (y-1)^2)}$ ~~is~~ maximum at $(1, 1)$ and decrease with increasing $|x|$ or $|y|$.

↳ u is (not) constant in D_4 and the minimum is the border of the disk.

u would be constant if $u_{xx} + u_{yy} = 0$ or in other words if u is harmonic, but:

$$u_{xx} = -((x-1)^2 + (y-1)^2) 2(x-1) e^{-((x-1)^2 + (y-1)^2)}$$

$$u_{yy} = -((x-1)^2 + (y-1)^2) 2(y-1) e^{-((x-1)^2 + (y-1)^2)}$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = -((x-1)^2 + (y-1)^2) 2 e^{-((x-1)^2 + (y-1)^2)} (x+y-2) \neq 0$$

Quizfrage 7

1.MC9 [3 Points] Consider the Neumann problem for the following PDE,

$$\begin{cases} \nabla^2 u = f, & \text{in } D_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{on } \partial D_2, \end{cases}$$

with D_2 the disk of radius 2 centred at 0 and f and g are two given functions such that

$$\int_{D_2} f(x) \, dx = 2, \quad \text{and} \quad \int_{\partial D_2} g(x) \, dx = 2.$$

Which of the following is true:

- (A) There are infinitely many solutions.
- (B) There is no solution.
- (C) There are two solutions.
- (D) We cannot conclude that (A), (B), or (C) are true.

Um eine zwingende Bedingung zu finden integrieren wir die Randbedingung mit Satz von Gauss:

$$\int_{\partial D_2} g \stackrel{BC}{=} \int_{\partial D_2} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial D_2} \nabla u \cdot n \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{D_2} \operatorname{div}(\nabla u) = \int_{D_2} \Delta u = \int_{D_2} f = 2 = 2 \Rightarrow \text{We can't conclude anything}$$

Quizfrage 8

1.MC9 [3 Points] Consider the Dirichlet problem for the Laplace equation,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\},$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in R, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & 0 \leq y \leq 2, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 2) = f(x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

where f is a continuous function.

- (A) There are infinitely many solutions.
- (B) We cannot say anything.
- (C) There is a unique solution.
- (D) There is no solution.

We have learnt that there exist an unique solution for the Dirichlet-Problem on a rectangle

(To prove that we have unique solution, assume that u_1, u_2 are solutions to the Laplace equation:)

$$\begin{cases} \Delta v = u_1 - u_2 = 0 \\ v(0, y) = u_1(0, y) - u_2(0, y) = 0 \\ v(1, y) = u_1(1, y) - u_2(1, y) = 0 \\ v(x, 2) = u_1(x, 2) - u_2(x, 2) = f(x) - f(x) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

Tipps für Vorbereitung:

- Druckt eine ZF mit max. 20 Seiten aus ergänzt DFT
- Falls Theorie Refresh sehr notwendig $\leadsto$ PUK Skript $\leadsto$ Gioele Zardini
- Alte Prüfungen lösen (idealerweise von Iozzi), aber nicht ganz alte!
- 2 Stunden Prüfung ohne Zeitstress (in der Regel)
 - $\hookrightarrow$ Vermeidet Flüchtigkeitsfehler
- Aufbau: $\sim 3 \times 9 = 27$ Pkt. SC
 - $\sim 15 + 10 = 25$ Pkt offene Aufgabe $\leadsto$ verwendet Korrekturscheinen, um zu überprüfen ob ihr genug aufgeschrieben.
 - $\sim$ 1. Seite: Formeln, welche ihr diese Herleitung nutzen könnt, (war in den letzten Jahren meistens gleich)