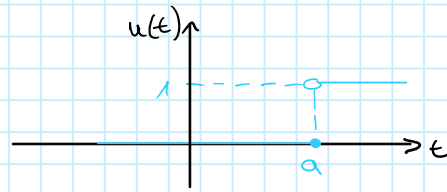


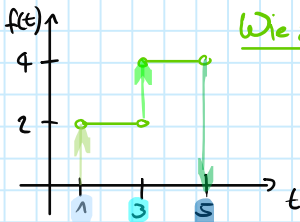
Heaviside Function

Def $u(t-a) := \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad \forall a \geq 0$



• verwendet um abrupte Änderungen in Signalen oder Systemen darzustellen

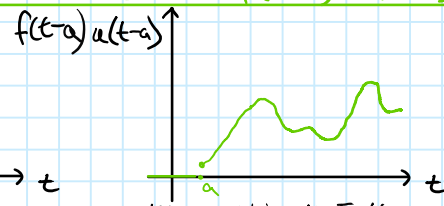
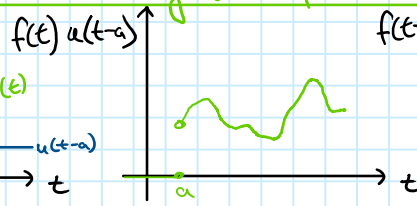
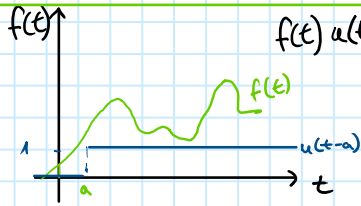
Bsp. 1.



Wie stellt man eine unstetige Funktion mit der Heaviside-Funktion dar?

$$f(t) = 2u(t-1) + 2u(t-3) - 4u(t-5)$$

Graphische Darstellung von $f(t)u(t-a)$ und $f(t-a)u(t-a)$.



"Wir schneiden mit $u(t-a)$ $f(t)$ bei a ab"

Wir verschieben die Funktion um a , und dann schneiden wir bei a ab. (oder umschneiden bei 0 ab und dann verschieben man um a)

$\sim$ normalerweise $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$ (in Analysis III)

t-shifting

- Verschiebung / Verzögerung der Funktion im ursprünglichen Zeitbereich

Def $\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$

Def $\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$

$\hookrightarrow$ t-shifting: Verschiebung der Funktion in t-Domäne

$\hookrightarrow$ s-shifting: Verschiebung der Funktion ($\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$) in s-Domäne

$\sim$ Aufgabe 2 von der Serie 1 könnte man auch wie folgt lösen: Funktion mit Heavisidefunktion darstellen und dann t-shifting und Tabelle

- Man kann eigentlich meistens beide Definitionen verwenden.

$\hookrightarrow$ Tipps: $f(t)$ zu $f(t-a)$ umformen:

Ergänzen & Erweitern, Periodizität, Additionstheorem

$\sim$ wäre mit Def. 2 schneller einfacher ($f(t-a)$ berechnen jedoch auch mit Def. 1 möglich)

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$u(t-a), a \geq 0$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
		$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\delta(t-a), a \geq 0$	e^{-as}

$\mathcal{L}\{u(t-1) \cdot t^2\} = ?$

$F(s) = \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t^2 - 2t + 1 + 2t - 1)\} = \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot ((t-1)^2 + 2t - 1)\}$
 $= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2 + 2tu(t-1) - u(t-1)\}$ (ausmultiplizieren)

$= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2 + 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1) - u(t-1)\}$

$= \mathcal{L}\{u(t-1) \cdot (t-1)^2\} + 2\mathcal{L}\{(t-1) \cdot u(t-1)\} + \mathcal{L}\{u(t-1)\}$

$\stackrel{\text{t-shifting}}{=} e^{-s} \mathcal{L}\{t^2\} + 2 \cdot e^{-s} \cdot \mathcal{L}\{t\} + e^{-s} \mathcal{L}\{1\} = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$

Bsp 3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 \alpha} &= 1 + \tan^2 \alpha \\ \frac{1}{\sin^2 \alpha} &= 1 + \cot^2 \alpha \\ \sin(90^\circ \pm \alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(180^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha \\ \cos(90^\circ \pm \alpha) &= \mp \sin \alpha \\ \cos(180^\circ \pm \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^n, n > 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$u(t-a), a \geq 0$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\delta(t-a), a \geq 0$	e^{-as}

$$\mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot \cos(t)\} = ?$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot \cos(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-\pi) \cdot (-\cos(t-\pi))\} = -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\cos(t)\} = -e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}\{u(t+2) \sin(t)\} = ?$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t+2) \sin(t)\} &= \mathcal{L}\{u(t+2) \sin(t+2-2)\} = \mathcal{L}\{u(t+2) (\sin(t+2) \cos(2) - \sin(2) \cos(t+2))\} \\ &= e^{2s} (\cos(2) \mathcal{L}\{\sin(t)\} + \sin(2) \mathcal{L}\{\cos(t)\}) = e^{2s} \left(\cos(2) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \sin(2) \frac{s}{s^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

Laplace von Ableitungen

$$\text{Def. } \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0) \quad \forall n \geq 1$$

$$n=1: \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$n=2: \mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(0) - f'(0)$$

$$n=3: \mathcal{L}\{f'''(t)\}(s) = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

Bedingungen: 1) $|f| \leq M e^{kt}$ (Wachstumsbeschränkt)

2) $f^{(n)}$ stückweise stetig

3) $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ stetig $\forall t \geq 0$

Lösen einer gewöhnlichen DGL mit Laplace Transform

Kochrezept: 1. Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen

2. Nach Laplace von gesuchter Funktion (in Bsp. $Y(s)$) auflösen

3. Inverse Laplace, um $y(t)$ zu bestimmen

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1; y'(0) = 0 \end{cases} \quad y(t) = ?$$

$$1) \mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\} \quad \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) - s Y(s) + y(0) - 2 Y(s) = s^2 Y(s) - s - s Y(s) + 1 - 2 Y(s) = 0$$

$$2) Y(s) (s^2 - s - 2) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$(s-2)(s+1) \cdot \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \rightarrow s-1 = A(s+1) + B(s-2) = \frac{1}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+1)}$$

$$\begin{cases} s: 1 = A + B \\ 1: -1 = A - 2B \end{cases} \Rightarrow 2 = 3B \quad B = \frac{2}{3} \quad A = 1 - B = \frac{1}{3}$$

$$3) y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}$$

• Falls Anfangswertproblem $\Rightarrow y(a) = \dots, y'(a) = \dots$ für $a \neq 0$

Kochrezept: 1) Substitution mit $\eta = (t - a) \Rightarrow u(\eta) = y(\eta + a); u'(\eta) = y'(\eta + a); \dots$
 $\Rightarrow u(0) = y(0 + a), u'(0) = y'(0 + a); \dots$

2) Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen

3) Nach Laplace von gesuchter Funktion (im Bsp. $U(s)$) auflösen

4) Inverse Laplace, um $u(\eta)$ zu bestimmen

5) Rücksubstitution: $\eta = t - a$

$$\begin{cases} y'' + 4y' = 4t \\ y(3) = 0, y'(3) = 7 \end{cases} \quad y(t) = ?$$

1) Substitution: $\eta = t - 3 \Rightarrow \eta + 3 = t$

$$\begin{aligned} y''(\eta + 3) + 4y'(\eta + 3) &= 4(\eta + 3) \\ u(\eta) &= y(\eta + 3) \quad u(0) = y(3) = 0 \\ u'(\eta) &= y'(\eta + 3) \quad u'(0) = y'(3) = 7 \\ u''(\eta) &= y''(\eta + 3) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Substitution}$$

$$\Rightarrow u''(\eta) + 4u'(\eta) = 4(\eta + 3)$$

2) $s^2 U(s) - s u(0) - u'(0) + 4s U(s) - u(0) = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s}$

$$U(s) (s^2 + 4s) - 7 = \frac{4 + 12s}{s^2}$$

3) $U(s) = \frac{4 + 12s + 7s^2}{s^3(s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s + 4}$

Bsp. 8

4) $4 + 12s + 7s^2 = A s^2(s + 4) + B s(s + 4) + C(s + 4) + D s^3$

$s^3: 0 = A + D \quad D = -\frac{17}{16}$

$s^2: 7 = 4A + B \quad A = \frac{7}{4} - \frac{11}{16} = \frac{28}{16} - \frac{11}{16} = \frac{17}{16}$

$s: 12 = 4B + C \Rightarrow B = \frac{11}{4}$

$1: 4 = 4C \quad C = 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{17}{16} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{11}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{17}{16} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 4}\right\}$$

$$u(\eta) = \frac{17}{16} + \frac{11}{4} \eta + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{17}{16} e^{-4\eta}$$

5) Rücksubstitution: $\eta = t - a$

$$y(t) = u(t - 3) = \frac{17}{16} + \frac{11}{4} (t - 3) + \frac{1}{2} (t - 3)^2 - \frac{17}{16} e^{-4(t - 3)}$$

Ableitungen in der s-Domäne

Def. $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}\{f(t)\}(s)] \quad n \in \mathbb{N}$

→ vorher haben wir die Ableitung in der t-Domäne angeschaut

→ Wird in der Vorlesung erst nächste Woche eingeführt, kommt aber in der Serie vor.

$\mathcal{L}(t \cdot \cos(t)) = ?$

Bsp. 8

$$\mathcal{L}(t \cdot \cos t) = - \frac{d}{ds} \left[\frac{s}{s^2 + 1} \right] = - \frac{(s^2 + 1) - s \cdot 2s}{(s^2 + 1)^2} = - \frac{-s^2 + 1}{(s^2 + 1)^2}$$

Tipps Serie 2

≡ = wichtig

≡ = hilfreich

≡ = nicht so wichtig

- 1) a) Tabelle (vgl. Bsp. 6 (Woche 1))
 b) Tabelle (vgl. Bsp. 6 (Woche 1))
 c) Partialbruchzerlegung und Tabelle (vgl. Bsp. 8 (Woche 1))
 d) Partialbruchzerlegung, Erweitern und Tabelle (vgl. Bsp. 7+8 (Woche 1))
 e) Partialbruchzerlegung, s-shifting (Zähler nicht vergessen) und Tabelle (vgl. Bsp. 7+8 (Woche 1))
- 2) a) s-shifting und Tabelle
 b) cosh mit Exponentialfunktion definieren und Tabelle
 c) sinh mit Exponentialfunktion definieren, Tabelle und Ableitung in s-Domäne (vgl. Bsp. 8)
 d) Tabelle und Ableitung in s-Domäne (vgl. Bsp. 8)
 e) t-shifting und Tabelle
 f) Periodizität, t-shifting und Tabelle (vgl. Bsp. 4)
 g) Linearität, Erweitern und Additionstheoreme (vgl. Bsp. 3+5)
- 3) a) Definition LT oder Heaviside-Funktion, t-shifting (Def. 2 einfacher) und Periodizität
 b) Definition LT oder Heaviside-Funktion, t-shifting (Def. 2 einfacher) und Ausmultiplizieren
- 4) a) Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 6)
 b) Lösen einer DGL mit LT und s-shifting (rechte Seite) (vgl. Bsp. 6)
 c) Lösen einer DGL mit LT und t-shifting (rechte Seite) (vgl. Bsp. 6)
- 5) - Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 7)
 - Ableitung in s-Domäne verwenden (siehe Hint)
 - Man erhält eine inhomogene DGL erster Ordnung
 - DGL mit Analysis 2 lösen:
 - Homogene DGL lösen mit Separation der Variablen
 - Lagrange oder Ansatz für allgemeine/partikuläre Lösung

Störfunktion	Ansatz für y_p
Konstante	$y_p = A$
lin. Fkt.	$y_p = Ax + B$
quadr. Fkt.	$y_p = Ax^2 + Bx + C$
Polynom n-Grades	$y_p = A + Bx + Cx^2 + \dots + Zx^n$
$A \sin(\omega x)$	$y_p = C \sin(\omega x) + D \cos(\omega x)$
$B \cos(\omega x)$	
$C \sin(\omega x) + D \cos(\omega x)$	
$A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ oder falls $b = -a$: $y_p = Cx \cdot e^{bx}$

Ansatz von Lagrange

- 4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot \dots$
- 4.2 Konstante C als veränderliche Fkt.: $C = C(x) \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot \dots$
- 4.3 Ableiten: $y'(x) = C'(x) \cdot \dots \rightarrow$ Produktregel!
- 4.4 Einsetzen in die inhomogene DGL
- 4.5 Lösen nach $C(x) \rightarrow$ meist partielle Integration
- 4.6 Lösung für $C(x)$ in Lösung von y_h einsetzen $\rightarrow$ 5

(Kapitel 23.1 & 23.2)
auf meiner ZF

- 6) a) • Ableitung von $|f|$ bestimmen
 - Laplace von Ableitung verwenden um $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{|f|}\right\}$ und $\mathcal{L}\{|f|\}$ in Relation zu bringen
 - $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{|f|}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ (aus Aufgabe 1c)
- b) • $g_n(t) = t^n |f|$ definieren
 - $g_n'(t)$ bestimmen und durch LT von Ableitung $\mathcal{L}\{g_n'\}$ und $\mathcal{L}\{g_n\}$ in Relation bringen
 - Induktion und Umformen um die Gleichung zu vereinfachen