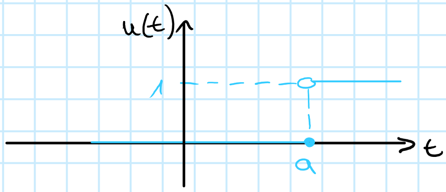
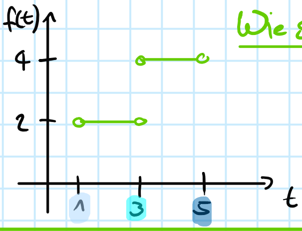
Heaviside Function

Def $u(t-a) := \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad \forall a \geq 0$



· Verwendet um abrupte Änderungen in Signalen oder Systemen darzustellen

Bsp. 1.



Wie stellt man eine unstetige Funktion mit der Heaviside-Funktion dar?

$f(t) =$

Bsp. 2.

Graphische Darstellung von $f(t)\,u(t-a)$ und $f(t-a)\,u(t-a)$.

t-shifting

• Verschiebung/Verzögerung der Funktion im ursprünglichen Zeitbereich

↳ t-shifting: Verschiebung der Funktion in t-Domäne

↳ s-shifting: Verschiebung der Funktion in s-Domäne ($\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$)

Def $\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t)\}$

Def $\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t+a)\}$

Aufgabe 2 von der Serie 1 konnte man auch wie folgt lösen: Funktion mit Heavisidefunktion darstellen und dann t-shifting und Tabelle

• Man kann eigentlich meistens beide Definitionen verwenden.

↳ Tipps: $f(t)$ zu $f(t-a)$ umformen:

Ergänzen & Erweitern, Periodizität, Additionstheorem

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

wäre mit Def. 2 schneller einfach $\mathcal{L}\{(t+1)^2\}$ berechnen jedoch auch mit Def. 1 lösbar

Bsp 3.

$\mathcal{L}(u(t-1) \cdot t^2) = ?$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$$
$$\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a>0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Def.1 und Def.2 etwa gleich schnell

Bsp 4.

$\mathcal{L}\{u(t-\pi)\cdot\cos(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{u(t-\pi)\cdot\cos(t)\} =$

Def.1 und Def.2 etwa gleich schnell

Bsp 5.

$\mathcal{L}\{u(t+2)\sin(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{u(t+2)\sin(t)\} =$

Laplace von Ableitungen

Def. $\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0) \quad \forall n \geq 1}$

$n=1$: $\mathscr{L}(f')(s) = s\mathscr{L}(f) - f(0)$

$n=2$: $\mathscr{L}(f'')(s) = s^2\mathscr{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

$n=3$: $\mathscr{L}(f''')(s) = s^3\mathscr{L}(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$

Bedingungen:
1) $|f| \leq Me^{kt}$ (wachstumsbeschränkt)
2) $f^{(n)}$ stückweise stetig
3) $f, f' \ldots f^{(n-1)}$ stetig $\forall t \geq 0$

Lösen einer gewöhnlichen DGL mit Laplace Transform

Kochrezept:
1. Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen
2. Nach Laplace von gesuchter Funktion (im Bsp. $Y(s)$) auflösen
3. Inverse Laplace, um $y(t)$ zu bestimmen

Bsp. 6.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad y(t) = ?$$

- Falls Anfangswertproblem $\Rightarrow y(a) = \ldots,\ y'(a) = \ldots$ für $a \neq 0$

Kochrezept: 1) Substitution mit $\eta = (t-a) \Rightarrow u(\eta) = y(\eta+a);\ u'(\eta) = y'(\eta+a); \ldots$

$\Rightarrow u(0) = y(0+a),\ u'(0) = y'(0+a); \ldots$

2) Auf die gesamte DGL anwenden und Anfangsbedingungen einsetzen

3) Nach Laplace von gesuchter Funktion (im Bsp. $U(s)$) auflösen

4) Inverse Laplace, um $u(\eta)$ zu bestimmen

5) Rücksubstitution: $\eta = t - a$

Bsp. 8

$$\begin{cases} y'' + 4y' = 4t \\ y(3) = 0 \quad y'(3) = 7 \end{cases} \qquad y(t) = ?$$

1)

2) $s^2 U(s) - s\cancel{u(0)}^{0} - u'(0) + 4s\,U(s) - \cancel{u(0)}^{0} = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s}$

$$U(s)\left(s^2 + 4s\right) - 7 = \frac{4 + 12s}{s^2}$$

3) $$U(s) = \frac{4 + 12s + 7s^2}{s^3(s+4)} =$$

4) $4 + 12s + 7s^2 = As^2(s+4) + Bs(s+4) + C(s+4) + Ds^3$

$s^3:\ 0 = A + D \qquad D = -\frac{17}{16}$

$s^2:\ 7 = 4A + B \qquad A = \frac{7}{4} - \frac{11}{16} = \frac{28}{16} - \frac{11}{16} = \frac{17}{16}$

$s:\ 12 = 4B + C \Rightarrow B = \frac{11}{4}$

$1:\ 4 = 4C \qquad C = 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{17}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{11}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} - \frac{17}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$u(\eta) = \frac{17}{16} + \frac{11}{4}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{17}{16}e^{-4\eta}$$

5) Rücksubstitution: $\eta = t - a$

$y(t) =$

Ableitungen in der s-Domäne

Def. $\boxed{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\right] \quad n\in\mathbb{N}}$

↝ Wird in der Vorlesung erst nächste Woche eingeführt, kommt aber in der Serie vor.

↝ vorher haben wir die die Ableitung in der t-Domäne angeschaut

$\mathcal{L}(t\cdot\cos(t)) = ?$

Bsp. 8 $\mathcal{L}(t\cdot\cos t) =$

Tipps Serie 2

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) Tabelle (vgl. Bsp. 6 (Woche 1))
   b) Tabelle (vgl. Bsp. 6 (Woche 1))
   c) Partialbruchzerlegung und Tabelle (vgl. Bsp. 8 (Woche 1))
   d) Partialbruchzerlegung, Erweitern und Tabelle (vgl. Bsp 7+8 (Woche 1))
   e) Partialbruchzerlegung, s-shifting (Zähler nicht vergessen) und Tabelle (vgl. Bsp. 7+8 (Woche 1))

2) a) s-shifting und Tabelle
   b) cosh mit Exponentialfunktion definieren und Tabelle
   c) sinh mit Exponentialfunktion definieren, Tabelle und Ableitung in s-Domäne (vgl. Bsp 8)
   d) Tabelle und Ableitung in s-Domäne (vgl. Bsp. 8)
   e) t-shifting und Tabelle
   f) Periodizität, t-shifting und Tabelle (vgl. Bsp. 4)
   g) Linearität, Erweitern und Additionstheoreme (vgl. Bsp. 3+5)

3) a) Definition LT oder Heaviside-Funktion, t-shifting (Def. 2 einfacher) und Periodizität
   b) Definition LT oder Heaviside-Funktion, t-shifting (Def. 2 einfacher) und Ausmultiplizieren

4) a) Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 6)
   b) Lösen einer DGL mit LT und s-shifting (rechte Seite) (vgl. Bsp. 6)
   c) Lösen einer DGL mit LT und t-shifting (rechte Seite) (vgl. Bsp. 6)

5) • Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 7)
- Ableitung in s-Domäne verwenden (siehe Hint)
- Man erhält eine inhomogene DGL erster Ordnung
- DGL mit Analysis 2 lösen: • Homogene DGL lösen mit Separation der Variablen
  • Lagrange oder Ansatz für allgemeine/partikuläre Lösung

Störfunktion	Ansatz für y_p
Konstante	$y_p = A$
lin. Fkt.	$y_p = Ax + B$
quadr. Fkt.	$y_p = Ax^2 + Bx + C$
Polynom n-Grades	$y_p = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Zx^n$
$A\sin(\omega x)$ $B\cos(\omega x)$ $C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$	$y_p = C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$
$A \cdot e^{bx}$	$y_p = C \cdot e^{bx}$ oder falls $b = -a$: $y_p = Cx \cdot e^{bx}$

Ansatz von Lagrange
4.1 Homogene Lösung finden: $y(x) = C \cdot \ldots$
4.2 Konstante C als veränderliche Fkt.: $C = C(x) \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot \ldots$
4.3 Ableiten: $y'(x) = C'(x) \cdot \ldots$ → Produktregel!
4.4 Einsetzen in die inhomogene DGL

4.5 Lösen nach $C(x)$ → meist partielle Integration

4.6 Lösung für $C(x)$ in Lösung von y_h einsetzen → 5

(Kapitel 23.1 & 23.2 auf meiner ZF)

6) a) • Ableitung von $\sqrt{t}$ bestimmen
   • Laplace von Ableitung verwenden um $\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}$ und $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\}$ in Relation zu bringen
   • $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ (aus Aufgabe 1c)
   b) • $g_n(t) = t^n \sqrt{t}$ definieren
   • $g_n'(t)$ bestimmen und durch LT von Ableitung $\mathcal{L}\{g_n'\}$ und $\mathcal{L}\{g_n\}$ in Relation bringen
   • Induktion und Umformen um die Gleichung zu vereinfachen