

Laplace von Integralen

Laplace Transformation von Integralen können umgeschrieben werden in eine Laplace Transformation, welche nur von $f(t)$ abhängig ist.

Def. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

→ Beim Kuesz Laplace Transform können wir jetzt diese Eigenschaft verwenden, falls $\frac{1}{s}$ Terme vorkommen anstatt Partialbruchzerlegung

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t + \sin t) dt\right\}(s) = ?$

Bsp 1. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t t + \sin t dt\right\}(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{t + \sin t\}(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s(s^2 + 1)}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} = ?$

Bsp 2. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \mathcal{L}\{\sin(t)\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(\tau) d\tau\right\}\right\} = \underline{\underline{-\cos(t) + 1}}$

Prüfungsaufgabe HS 2015

Finden Sie mittels Laplacetransformation die Lösung $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$f(t) = \cos(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\cos(t)) + \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) - \frac{\mathcal{L}(f(t))}{s} = \mathcal{L}(f(t)) \left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{(s^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{s}\right)} = \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s - 1)} = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{C}{(s - 1)}$$

Bsp 3. $s^2 = A(s^2 - s) + B(s - 1) + C(s^2 + 1)$

$s^2: 1 = A + C \quad 1 = A + A \Rightarrow A = \frac{1}{2} = B = C$

$s: 0 = -A + B \quad A = B$

$1: 0 = -B + C \quad B = C$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s - 1} \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - 1}\right) \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2} (\cos(t) + \sin(t) + e^t)}}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$u(t - a), a \geq 0$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geq 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\delta(t - a), a \geq 0$	e^{-as}

14 Partialbruchzerlegung

1. einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x - x_0)}$
2. doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x - x_0)} + \frac{B}{(x - x_0)^2}$
3. komplexe Nullstelle: $\frac{Ax + B}{(x - Bx^2 + 1)}$

Beispiel: $\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

$$\begin{cases} -A - B + C = 0 \\ -B + 3C = 1 \\ A + B + 3C = 0 \\ B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$$

Tipp: $(1 + x^3) = (1 + x)(1 - x + x^2)$

Integration von Laplace Transforms

Wir können die Integration von einer Laplace Transformation durch Laplace Transformation von dieser Funktion $f(t)$ geteilt durch t beschreiben.

Def. $\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(s) d\sigma = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}(s)$ $\leadsto$ Diese Eigenschaft gilt eigentlich nur falls $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existiert.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2}\right\} = ?$$

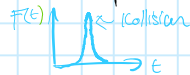
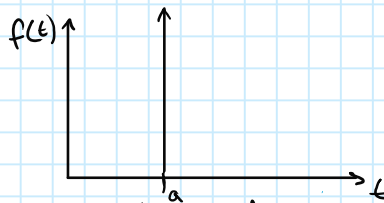
Bsp. 4 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma = \int_s^\infty \frac{4}{(\sigma-2)^2} d\sigma = 4 \int_s^\infty (\sigma-2)^{-2} d\sigma = 4 \left[\frac{-1}{\sigma-2}\right]_s^\infty = \frac{4}{s-2}$

$$\frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4 \cdot e^{2t} \quad f(t) = \underline{\underline{4 \cdot e^{2t} \cdot t}}$$

Dirac's Delta Funktion

Mit der Dirac's Delta Funktion können wir beispielsweise bei Kollisionen grosse Kräfte, die ruckartig auftreten, approximieren.

Def. $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$



Mathematisch gesehen ist Dirac's Delta keine Funktion sondern eigentlich ein Grenzwert einer Funktion. Wir können Dirac's Delta durch die Heaviside Funktion definieren.

Def. $\delta(t-a) := \lim_{h \rightarrow 0} f_h(t-a)$ mit $f_h(t-a) = \left(\frac{1}{h}(u(t-a) - u(t-(a+h)))\right) = \begin{cases} 1/h & t \in [a, a+h] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Hierbei gilt $\int_0^\infty f_h(t-a) dt = \int_a^{a+h} \frac{1}{h} dt = 1$



Eigenschaften

• Integral der Dirac's Delta Funktion

Def. $\int_0^\infty \delta(t-a) dt = 1$

• Integral der Dirac's Delta Funktion, welche mit einer Funktion multipliziert wird

Def. $\int_0^\infty g(t) \delta(t-a) dt = g(a)$

Bsp 5. $\int_0^\infty t^2 \delta(t-2) dt = ?$ $\int_0^\infty t^2 \delta(t-2) dt = 2^2 = 4$

- Zusammenhang zur Heaviside Funktion

Def $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \rightsquigarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\delta(\tau)\} \stackrel{\text{Tabell}}{=} \frac{1}{s} e^{-as} \rightarrow \mathcal{L}\{\delta(\tau)\} = e^{-as} \text{ (siehe nachfolgende Eigenschaft)}$

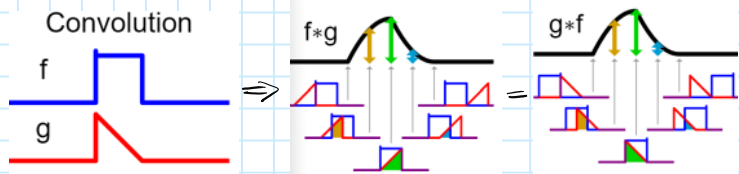
- Laplace Transform der Dirac's Delta Funktion

Def $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Convolution

Die Convolution/Faltung zweier Funktion ist definiert als:

Def $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$



- Diskrete Convolutions werden unter anderem für Bildverarbeitung (Informatik II/SML) und Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht.

- Wir verwenden in Analysis III kontinuierliche Convolutions. $\rightsquigarrow$ Integral anstatt Summe

Die Faltung (Convolution) kann als spezielle

"Multiplikation" angesehen werden, welche ein Mass der Überschneidung angibt.

Für die Laplace Transformation einer Faltung (Convolution) gilt:

Def $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s)$
 $\rightsquigarrow$ Falls wir in der s-Domäne eine Multiplikation sehen, können wir die Inverse als Convolution darstellen.
 $\rightsquigarrow$ wir können jetzt alternativ zur Partialbruchzerlegung manchmal eine Faltung (Convolution) verwenden

Eigenschaften

- Def
1. $f * g = g * f$ (Kommutativ)
 2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ (Assoziativ)
 3. $f * (g * h) = (f * g) * h$ (Distributiv)
 4. $f * 0 = 0 * f = 0$
 5. $f * 1 = \int_0^t f(\tau) d\tau \neq f$
 6. $f * f$ kann negativ sein!

Bsp 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2\right\} = ?$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{s}{s^2+1}\right)^2\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\cos(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\cos(t)\}\right\}$$

convolution

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\cos t * \cos t\}\right\} = \cos t * \cos t = \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau$$

$$= \cos t \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau = \cos t [-\sin(t-\tau)]_0^t = \underline{\underline{\cos t \sin t}}$$

Prüfungsaufgabe FS 2017

1. Laplace Transform (8 Points)

Let $a > 0$. Solve the following initial value problem using the Laplace transform.

$$\begin{cases} y'(t) + \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = \delta(t-a) & \text{for } t \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Please justify your answer.

$$1) \mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) \cdot \cos(t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$$

$$sY(s) - \cancel{y(0)} + \mathcal{L}\{y(t) * \cos(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-a)\}$$

$$sY(s) + \mathcal{L}\{y(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\cos(t)\} = sY(s) + Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1} = Y(s) \left(s + \frac{s}{s^2+1}\right) = e^{-as}$$

$$2) Y(s) = \frac{e^{-as}}{s \left(1 + \frac{1}{s^2+1}\right)} = \frac{(s^2+1) \cdot e^{-as}}{s(s^2+2)}$$

$$\frac{s^2+1}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2} \right)$$

$$s^2+1 = A(s^2+2) + (Bs+C)s$$

$$s^2: 1 = A + B \Rightarrow B = 1$$

$$s: 0 = C$$

$$1: 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$3) y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2+1}\right\}$$

$$\stackrel{\text{t-shifting}}{=} \frac{1}{2} \cdot u(t-a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t-a) + \frac{1}{2} \cdot u(t-a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\}(t-a)$$

$$= \frac{1}{2} u(t-a) \left(1 + \cos(\sqrt{1^2}(t-a)) \right)$$

Bsp. 7

Tipps Serie 3

📌 = wichtig

📌 = hilfreich

📌 = nicht so wichtig

- 1) a) ϵ -shifting und Tabelle
b) s -shifting, t -shifting und Tabelle
c) Convolution und Tabelle / Integral in t -Domäne und Tabelle / Partialbruchzerlegung und Tabelle
d) Convolution, Umformen und Tabelle ; Tipp zum Umformen: $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
e) Ableitung in t -Domäne und Tabelle / Integral in s -Domäne und Tabelle
- 2) a) Definition der Convolution / Laplace der Convolution und Inverse mit Tabelle bestimmen
b) Definition der Convolution / Laplace der Convolution und Inverse mit Tabelle bestimmen
c) Laplace der Convolution und Inverse mit Tabelle bestimmen / (Definition der Convolution)
- 3) Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 7 (Woche 3)), Tipp für die Inverse: Convolution
- 4) a) Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 7 (Woche 3))
b) Lösen einer IGL mit LT (vgl. Bsp. 3 (Woche 3))
- 5) Lösen einer DGL mit LT (vgl. Bsp. 7 (Woche 3))

Laplace Transformation - Recap

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad \text{mit } s \in \mathbb{C}$$

Intuition:

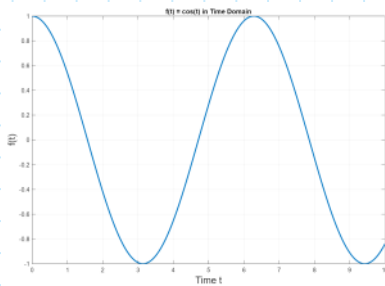
- Klassisches Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt$ ↗ LinAlg Flashback

Im Fall der Laplace Transformation ist $g(t) = e^{-st}$ und Integration erfolgt nur von $[0, \infty)$, so: $\langle f, e^{-st} \rangle \stackrel{\text{nur als Analoge}}{=} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$

Dieses "Skalarprodukt" (Laplace Transformation), misst sozusagen wie stark die Funktion $f(t)$ auf die "Basisfunktion" e^{-st} projiziert wird.

- Achtung aber s ist eine komplexe Zahl $s = \sigma + i\omega$. Hierbei beschreibt σ die Abklingrate und ω die Schwingfrequenz.

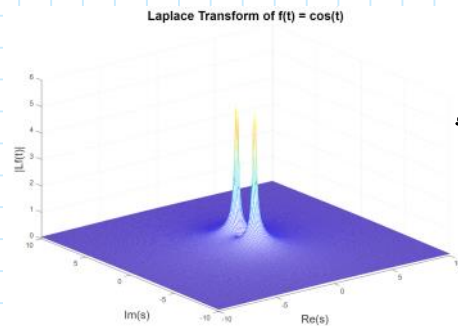
- Der Wert an jedem s gibt sozusagen an, wie stark es in $f(t)$ vertreten ist (so wie ein Radar)



$$f(t) = \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

Man kann $\cos(t)$ durch diese zwei Exponentialfunktion zusammensetzen unser "Radar"

musste bei $s = \pm i$ stark ausschlagen



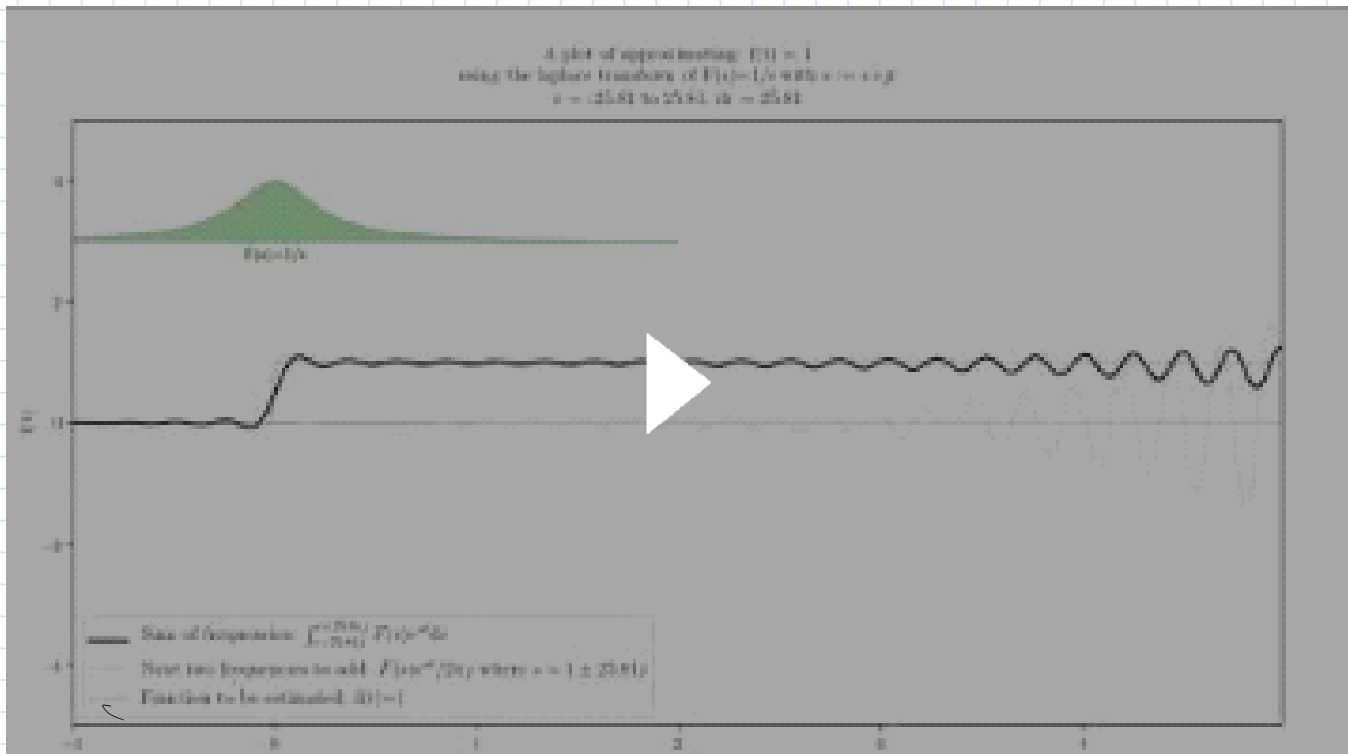
$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow \pm i} \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2 + 1} \rightarrow \infty$$

↳ unser Radar schlägt also stark aus!

[Laplace Transform animation for f\(t\)=1](#)

johnflux1

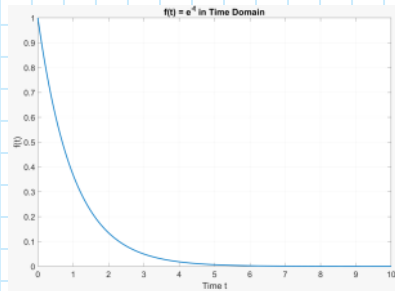


Linearität

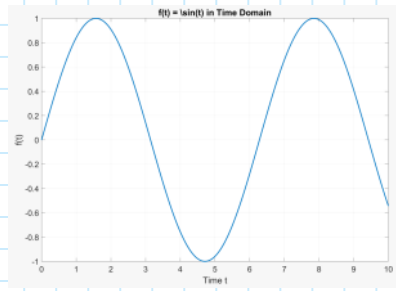
$$i. \mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

$$ii. \mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G)$$

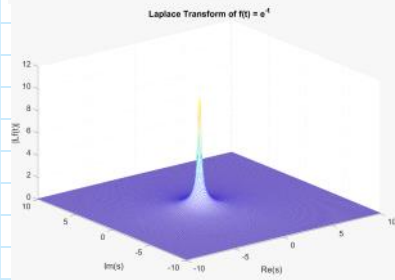
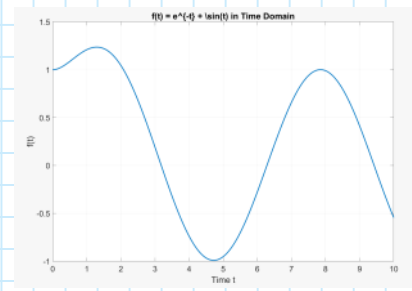
$$\mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} + \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$$



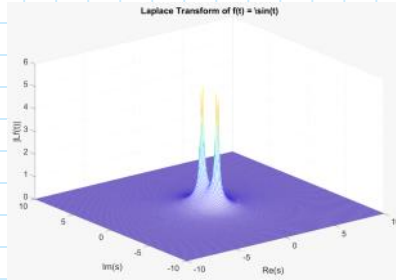
+



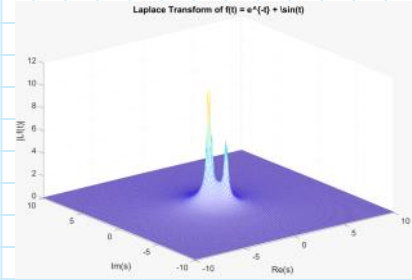
=



+



=

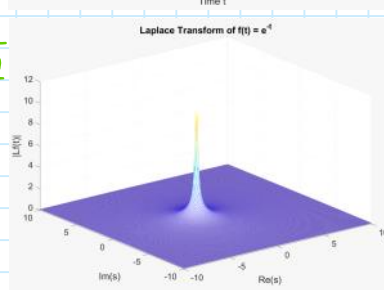
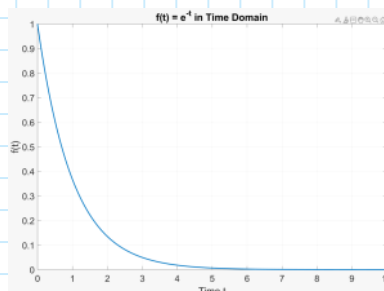


s-Shifting

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$

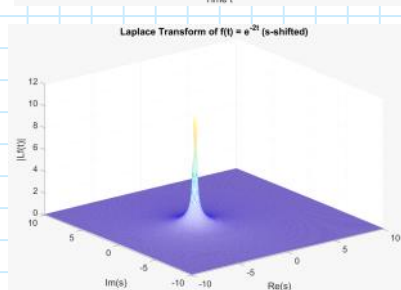
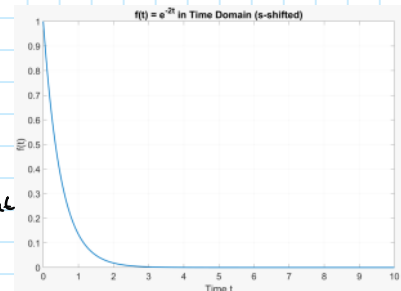
$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \mathcal{L}\{e^{-t} \cdot e^{-t}\} \stackrel{a=-1}{=} \frac{1}{(s+1)+1} = \frac{1}{s+2}$$



$$f(t) \Rightarrow f(t) \cdot e^{at}$$

s-shift
mit a=-1

$$F(s) \Rightarrow F(s-a)$$



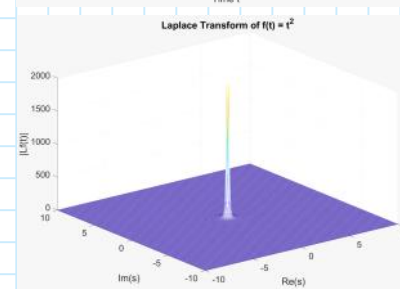
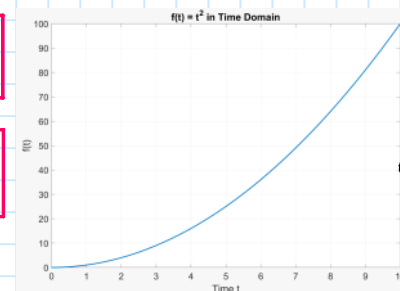
t-shifting

$$\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

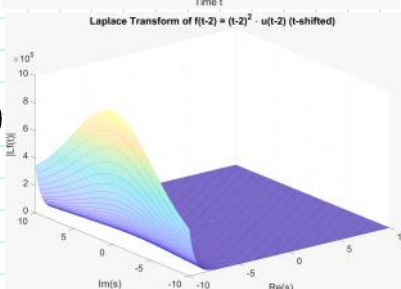
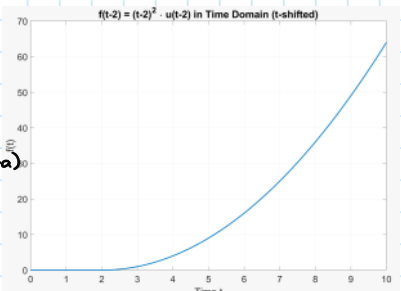
$$\mathcal{L}\{u(t-2) \cdot (t-2)^2\} = e^{-2s} \cdot \mathcal{L}\{t^2\} = e^{-2s} \cdot \frac{2}{s^3}$$



$$f(t) \Rightarrow f(t-a) \cdot u(t-a)$$

Def. 1
t-shift
mit
a=2

$$F(s) \Rightarrow e^{-as} F(s)$$

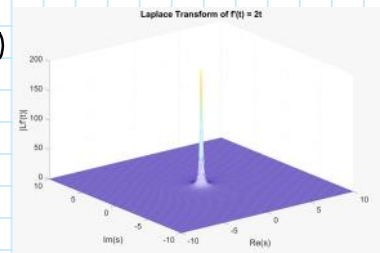
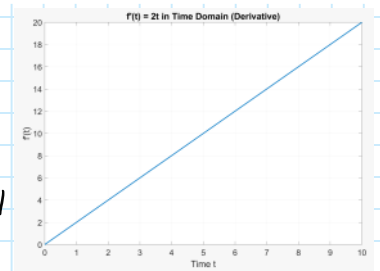
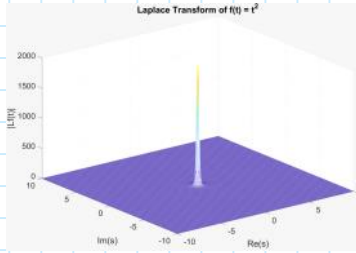
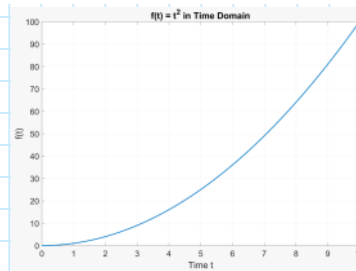


Laplace von Ableitungen

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0) \quad \forall n \geq 1$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^{2'}\} = s \mathcal{L}\{t^2\} = s \frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^2}$$



$f \Rightarrow f'$
mit
 $f(0)=0$
 $F(s) \Rightarrow s F(s)$

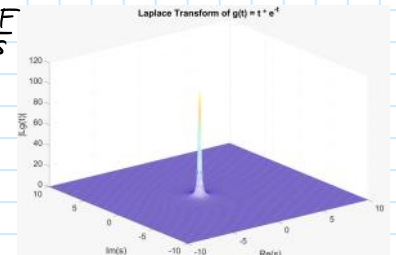
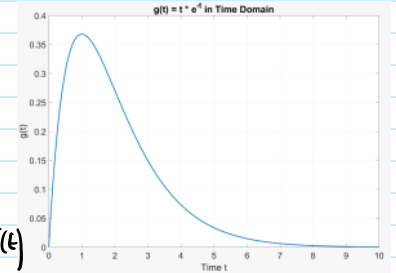
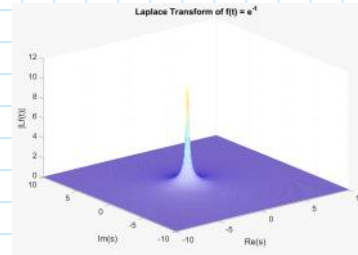
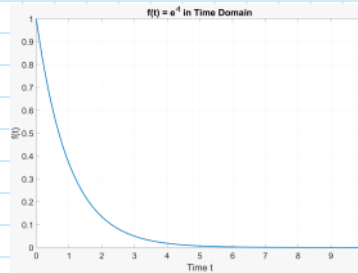
Ableitungen in der s-Domäne

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}\{f(t)\}(s)] \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot e^{-t}\} = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$= -1 \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

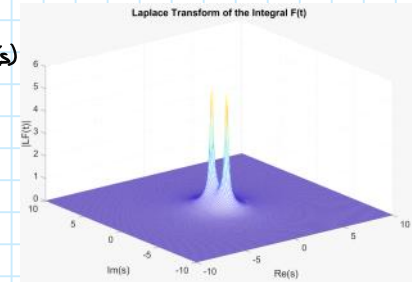
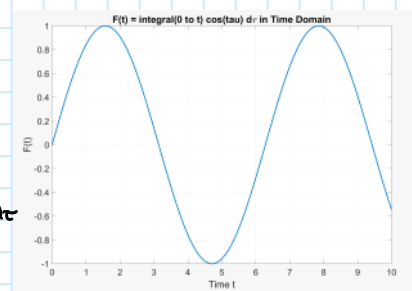
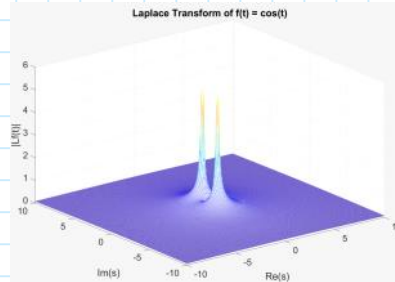
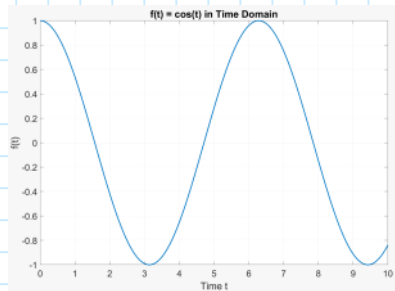


$f(t) \Rightarrow \mathcal{L}\{f\}$
 $F(s) \Rightarrow \frac{dF}{ds}$

Laplace von Integralen

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{1}{s} \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\sin(t)\}$$



$f(t) \Rightarrow \int_0^t f(\tau) d\tau$

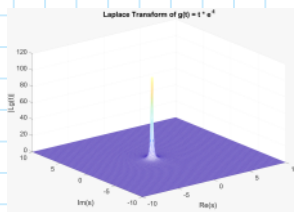
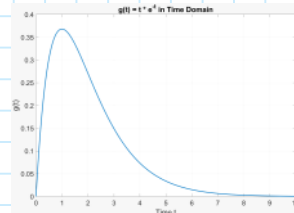
$F(s) \Rightarrow \frac{1}{s} F(s)$

Integration von Laplace Transforms

$$\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(s) d\sigma = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\}(s)$$

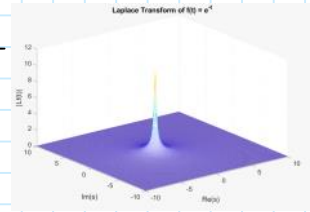
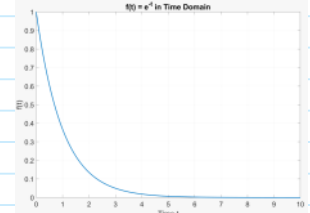
$$\mathcal{L}\{t \cdot e^{-t}\} = \frac{1}{(s+1)^2} \text{ (Gegeben)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-t}\} &= \int_s^\infty \mathcal{L}\{t \cdot e^{-t}\} ds = \int_s^\infty \frac{1}{(\sigma+1)^2} d\sigma \\ &= \left[-\frac{1}{\sigma+1} \right]_s^\infty = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$



$$f(t) \Rightarrow \frac{1}{t} f(t)$$

$$F(s) \Rightarrow \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$$

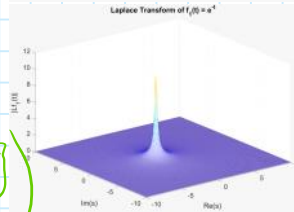
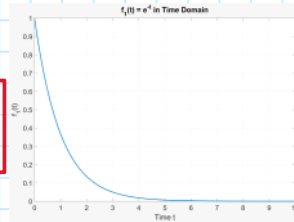


Convolutions

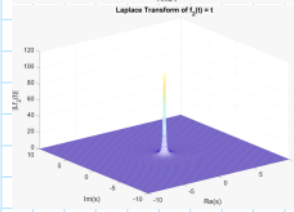
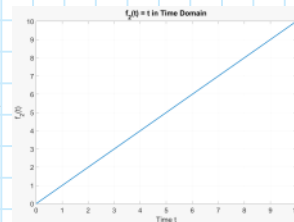
$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-t} * t\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \cdot \mathcal{L}\{t\} \\ &= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s+1)} \end{aligned}$$

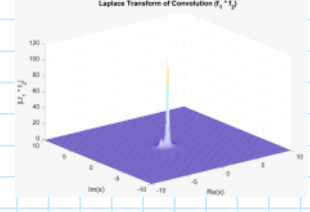
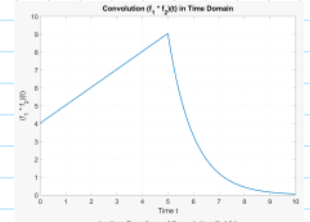
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-t} * t\} &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} (t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{[-e^{-\tau}(t-\tau)]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau\right\} \\ &= \mathcal{L}\{t + [e^{-\tau}]_0^t\} = \mathcal{L}\{t + e^{-t} - 1\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)} \end{aligned}$$



*



=



=

LT-Transforms an Prüfungen

- Normalerweise nur 1-2 MC-Fragen zu LT-Transforms
- DGH Lösen
- Inverse Laplace Transformationen
↳ Hierzu brauchen wir die Eigenschaften

	Initial Value Problem	Integral Equation	(Inverse) Transform
W 17	X		
S 17	X		
W 18		X	
S 18	X		
W 19	X		
S 19		X	
W 20	X		
S 20		X	
W 21	X		
S 21		X	
W 22	X		
S 22	X		
W 23	MC		MC
S 23	MC		MC
W 24	MC		
S 24	MC		MC