

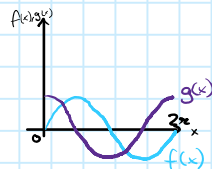
Periodische Funktion

Eine Funktion ist periodisch, wenn ein $p \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

Def. $f(x) = f(x+p) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bsp. 1

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sin(x) = \sin(x+p) \\ g(x) &= \cos(x) = \cos(x+p) \end{aligned} \right\} p =$$



Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$.

a) Show that it is periodic of period 2π .

Bsp. 2

Eigenschaften:

1. Für eine Funktion $f(x)$, welche p -periodisch ist, gilt, dass sie auch np -periodisch ist

Def. $f(x+np) = f(x) \quad n \in \mathbb{Z}$

↑
"fundamentale period d."
(kleinstes p)

2. Linearkombination zweier Funktionen f, g mit Periode p ist auch p -periodisch

Def. $f(x) = f(x+p); g(x) = g(x+p) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x+p) + bg(x+p) \quad a, b \in \mathbb{R}$

3. Periodische Funktion $f(x)$ mit Periode p , welche mit dem Faktor a gestaucht/gestreckt wird, ist $\frac{p}{a}$ -periodisch

Def. $f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(ax) = f(a(x + \frac{p}{a})) \quad a \in \mathbb{R}$

4. Die Linearkombination zweier periodischer Funktionen (f mit Periode p und g mit Periode q) ist ebenfalls periodisch und zwar mit der Periode $r = \text{kgV}(p, q)$

Def. $f(x) = f(x+p); g(x) = g(x+q) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x + \text{kgV}(p, q)) + bg(x + \text{kgV}(p, q))$

Bestimme die Periodizität von $\cos(nx)$ und $\sin(mx)$

Wir verwenden Eigenschaft 3:

siehe Bsp. 1
 $\sin(x) = \sin(x + 2\pi) \Rightarrow \sin(mx) =$
 $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \Rightarrow \cos(nx) =$

Bsp. 3

Diese Eigenschaften werden wir häufiger brauchen (auch an Prüfungen (siehe Bsp. 4))

Bestimme die Periodizität von $2 \sin(3x) + 4 \cos(5x)$

① Wir verwenden Eigenschaft 3 bzw. Beispiel 2:

↳ Periodizität der Summanden bestimmen: $\sin(3x) \Rightarrow$
 $\cos(5x) \Rightarrow$

② Wir verwenden Eigenschaft (4):

↳ Periodizität von $2 \sin(3x) + 4 \cos(5x)$: - periodisch

Methode 1 (Vorlesung):

① Gleichnamig machen:

Methode 2 (Ich):

① kgV des Zähler:

(Off 2x raus
wir haben ein
Faktor kleiner 1 im
sinus/cosinus)

② kgV von Zähler (koeffizienten) ② ggT der Nenner

③ Kürzen falls nötig:

③ kgV durch ggT teilen

Bsp. 4

Wie bestimmen wir eigentlich ob eine Funktion nicht periodisch ist:

• Beschränktheitssatz (boundedness theorem):

Def Falls $f(x)$ periodisch und stetig ist, sind $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ begrenzt.

Ist $\cos(x^3)$ periodisch?

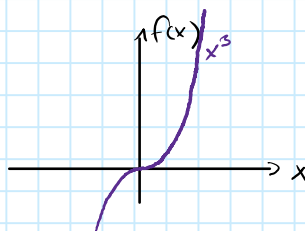
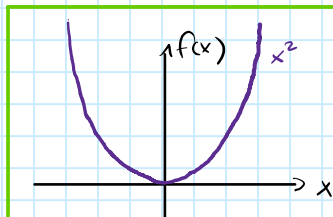
Bsp. 5

Gerade / Ungerade Funktion

Def

- $f(x)$ ist gerade, falls $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ ist ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$

Bsp. 6



Eigenschaften:

- $f(x)$ ist gerade: $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$
- $f(x)$ ist ungerade: $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$
- gerade $\cdot$ gerade $=$ gerade
- ungerade $\cdot$ ungerade $=$ gerade
- ungerade $\cdot$ gerade $=$ ungerade
- gerade $+$ gerade $=$ gerade
- ungerade $+$ ungerade $=$ gerade
- (gerade)' = ungerade
- (ungerade)' = gerade

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ gerade oder ungerade?

Bsp 7.

$f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$ gerade oder ungerade?

Bsp. 8

$f(x) = (\sin^2(x))'$ gerade oder ungerade?

Bsp. 9

Fourier Reihe

Für $f(x)$ mit Periode $2L$ gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

Def.

In der Vorlesung

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad \leftarrow \text{Mittelwert der Funktion}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \leftarrow n=0 \Rightarrow a_0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \leftarrow n=0 \Rightarrow b_n$$

• Intuition:

• ein Signal kann als Linearkombination von Cosinus respektive Sinustermen dargestellt werden bei verschiedenen Frequenzen

• a_n bzw. b_n sagen uns wie viel $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ bzw. $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ hierbei kann n variieren und ist proportional zur Frequenz

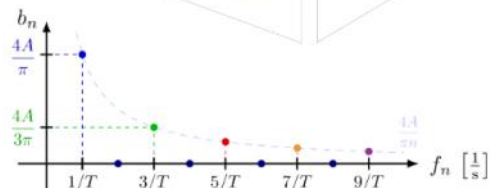
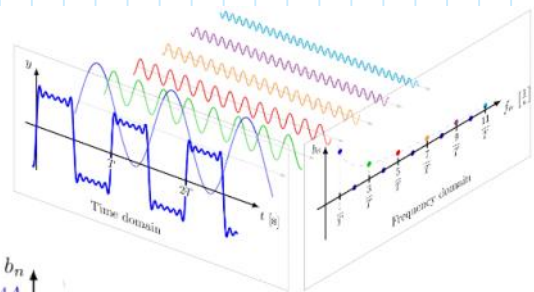
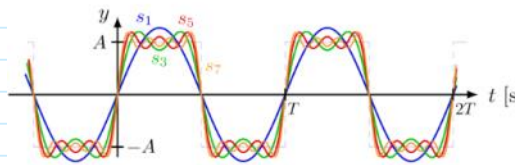
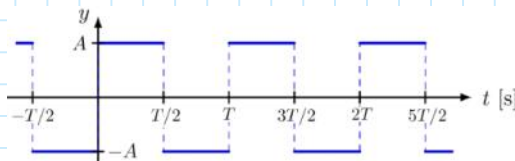
• Um zu wissen wieviel cosinus bzw. sinus in unsere Funktion vorkommt, können wir Skalarprodukt verwenden

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x) dx \quad \left(\text{Skalarprodukt zweier Funktionen} \right) \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Normalisierung

Parallele Δ Amplitude bei 5 gibt an wieviel e^{-st} in der Funktion vorkommt

• Idee: Beliebige periodische Signale aus einem diskreten Frequenzspektrum superponieren:



- Anwendungen:
- 1) Signale analysieren $\approx$ bestimmen welche Frequenzen in einem Signal vorkommen, um diese eventuell zu modifizieren (z.B. Equalizer)
 - 2) Quantenmechanik $\approx$ Teilchen ist in eine Superposition von sogenannten "Eigenstates"
 - 3) Partielle Differentialgleichungen lösen

Dirichlet-Theorem

$f(x)$ muss aber nicht unbedingt stetig sein. Jedoch konvergiert Fourier zu einem Grenzwert an den Unstetigkeiten und zwar:

Def.

$$f(x_0) = \frac{1}{2} (f^+(x_0) + f^-(x_0)) \quad f^{\pm}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x)$$

linker/rechter Grenzwert

Def.

Falls $f(x)$ gerade:

$$\bullet b_n = 0$$

$$\bullet a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Falls $f(x)$ ungerade:

$$\bullet a_0 = a_n = 0$$

$$\bullet b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

Orthogonalitätsrelationen

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n=m \neq 0 \end{cases} \\ (2) \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n=m \neq 0 \end{cases} \\ (3) \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0 \end{array} \right.$$

Wichtige Eigenschaften: $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (Seite 11)

8 Appendix

8.1 Umwandlungen

Gegeben: $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(n\pi) = 0; \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 1, & n=2j \\ 0, & n=2j+1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0, & n=2j \\ (-1)^j, & n=2j+1 \end{cases}$$

$$\sin(x) \sin(nx) = \frac{1}{2} (\cos((1-n)x) - \cos((n+1)x))$$

$$\cos(x) \cos(nx) = \frac{1}{2} (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))$$

$$\sin\left(n \pm \frac{1}{2}\right) = \pm \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(n \pm \frac{1}{2}\right) = \mp \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

etc.

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|$.

(a) Show that it is periodic of period 2π . *haben wir schon gelöst*

b) Compute its Fourier series.

c) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = ?$$

1) Bestimme L :

2) Gerade/Ungerade:

3) Koeffizienten bestimmen: a_0, a_n, b_n

Bsp. 10

4) $f(x)$ als Fourier-Reihe darstellen

c)

Tipps Serie 4

⚡ = wichtig

⚡ = hilfreich

⚡ = nicht so wichtig

- 1) a) Beschränktheitsatz: Was kann man zum Maximum/Minimum einer stetigen Funktion in einer einzelnen Periode und über die ganze periodische Funktion aussagen?
 b) Verwende die Definition der Ableitung (als Grenzwert einer Differenz) um $f'(x+p) = f'(x)$ zu beweisen.
 c) Verwende die Aussage von a), b) und dann a)...
 d) Zeig wie die Aussage von c) verletzt wird.

- 2) Wenn die Summe periodisch wäre würde gelten: $f(x+p) + g(x+p) = f(x) + g(x)$
 Wann gilt diese Gleichung? Was kann man über p aussagen in Bezug zu den Perioden P, Q der Funktionen (wir haben Beispiel hierzu in der Übungsstunde gesehen)?

- 3) a) Siehe Bsp. 3 (Woche 4)
 b) Beschränktheitsatz
 c) Siehe Bsp. 4 (Woche 4)
 d) Siehe Bsp. 4 (Woche 4)

- 4) - Zuerst x bzw x^2 von $[-L, L)$ zeichnen (eine Periode)... Danach wiederholen (mehrere Perioden)
 a) Sind f und/oder g stetig? Falls nein, besitzen sie eine linke und rechte Ableitung an den Unstetigkeiten.
 b) Verwende die Skizze, um zu schauen wo f bzw. g unstetig ist.
 c) Dirichlet: $\frac{1}{2} (f^+(x_k) + f^-(x_k))$ x_k sind die Stellen, welche wir in b) bestimmt haben.
 d) Werke Summe für die Stellen x_k , welche wir in b) bestimmt haben, aus und vergleiche mit Resultat aus c).

- 5) - Verwende Hint $\leadsto b_n = 0 \forall n$ (Wieso eigentlich?)
 2.3 Fourier-Reihe (Page 3) ZF

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$- L = \pi$$

- Kann man a_0 bestimmen ohne etwas konkret zu berechnen? (Tipp: Symmetrie)

- a_n ist nullsan zu berechnen:

$\rightarrow$ Verwende: $\cos(x) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2} (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))$

$$\bullet \cos^2(x) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1)$$

• Partielle Integration

• Orthogonalität der trig. Funktionen

8.5 Allgemein Integral

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \\ 2L & \text{für } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall n, m$$