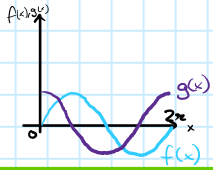
Periodische Funktion

Eine Funktion ist periodisch, wenn ein $p \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}}$

Bsp. 1

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) = \sin(x+2\pi) \\ g(x) &= \cos(x) = \cos(x+2\pi) \end{aligned}\right\} p = 2\pi$$



Bsp. 2

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$.

a) Show that it is periodic of period 2π.

$$\Rightarrow f(x) \overset{!}{=} f(x+2\pi)$$

$$f(x+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right| \overset{\sin(\alpha x+\pi) = -\sin(x)}{=} \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = f(x)$$

Eigenschaften:

Diese Eigenschaften werden wir häufiger brauchen (auch an Prüfungen (siehe Bsp. 4))

1. Für eine Funktion $f(x)$, welche p-periodisch ist, gilt, dass sie auch $n \cdot p$-periodisch ist

"fundamental period" (kleinstes p)

Def. $\boxed{f(x+np) = f(x) \quad n \in \mathbb{Z}}$

2. Linearkombination zweier Funktion f, g mit Periode p ist auch p-periodisch

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p);\ g(x) = g(x+p) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x+p) + bg(x+p) \quad a, b \in \mathbb{R}}$

3. Periodische Funktion $f(x)$ mit Periode p, welche mit den Faktor a gestaucht/gestreckt wird, ist $\frac{p}{a}$-periodisch

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(ax) = f(a(x+\frac{p}{a})) \quad a \in \mathbb{R}}$

4. Die Linearkombination zweier periodischen Funktionen (f mit Periode p und g mit Periode q) ist ebenfalls periodisch und zwar mit der Periode $r = \text{kgV}(p,q)$)

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p);\ g(x) = g(x+q) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x + \overbrace{\text{kgV}(p,q)}^{r}) + bg(x + \overbrace{\text{kgV}(p,q)}^{r})}$

Bsp. 3

Bestimme die Periodizität von $\cos(nx)$ und $\sin(mx)$

Wir verwenden Eigenschaft 3:

siehe Bsp. 1

$$\sin(x) = \sin(x + \overset{p}{2\pi}) \Rightarrow \sin(mx) = \sin\left(m\left(x + \frac{2\pi}{m}\right)\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{m}\text{-periodisch}$$

$$\cos(x) = \cos(x + \overset{p}{2\pi}) \Rightarrow \cos(nx) = \cos\left(n\left(x + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{n}\text{-periodisch}$$

Bestimme die Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$

① Wir verwenden Eigenschaft 3 bzw. Beispiel 2:

↳ Periodizität der Summanden bestimmen: • $\sin(3x) \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$-periodisch

• $\cos(5x) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}$-periodisch

② Wir verwenden Eigenschaft (4):

↳ Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$: $\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$-periodisch

$$\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$$

Bsp. 4

Methode 1 (Vorlesung):

① Gleichnamig machen:

$$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{5} \;;\; \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{3}{3} \Leftrightarrow \frac{10\pi}{15} \;;\; \frac{6\pi}{15}$$

② kgV von Zahler (Koefficienten)

$\text{kgV}(10, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

↳ $10 \mathrel{\hat{=}} 2 \quad 5$

$6 \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot 3$

③ Kürzen falls nötig:

$$\frac{30\pi}{15} = 2\pi$$

Methode 2 (Ich):

① kgV des Zähler:

$\text{kgV}(2\pi, 2\pi) = 2\pi$

Oft 2π ausser wir haben ein Faktor kleiner 1 im sinus/cosinus

② ggT der Nenner

$\text{ggT}(3, 5) = 1$

$3 \mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 3$

$5 \mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 5$

③ kgV durch ggT teilen

$$\frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Wie bestimmen wir eigentlich ob eine Funktion nicht periodisch ist:

• Beschränktheitssatz (boundedness theorem):

Def Falls $f(x)$ periodisch und stetig ist, sind $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ begrenzt.

Bsp. 5

Ist $\cos(x^3)$ periodisch?

Annahme: Falls $f(x) = \cos(x^3)$ periodisch $\Rightarrow$ begrenzt $\Rightarrow f'$ auch begrenzt

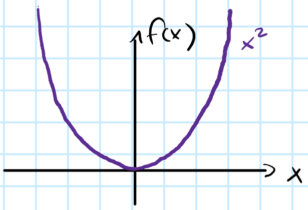
$f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 \Rightarrow$ nicht begrenzt $\Rightarrow$ nicht periodisch

Gerade / Ungerade Funktion

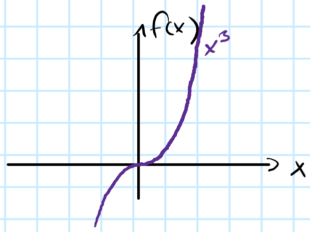
Def

- $f(x)$ ist gerade, falls $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ ist ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$

Bsp. 6



- Gerade Funktion
  ↳ spiegelsymmetrisch



- Ungerade Funktion
  ↳ punktsymmetrisch

Eigenschaften:

- $f(x)$ ist gerade: $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$
- $f(x)$ ist ungerade: $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0$

- gerade · gerade "=" gerade
- ungerade · ungerade "=" gerade
- ungerade · gerade "=" ungerade
- gerade + gerade "=" gerade
- ungerade + ungerade "=" ungerade
- (gerade)' = ungerade
- (ungerade)' = gerade

Bsp 7.

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ gerade oder ungerade?

$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

"=" gerade + gerade "=" gerade

Bsp. 8

$f(x) = \sin(\pi x) + \sin(x^2)$ gerade oder ungerade?

$f(-x) = \sin(-\pi x) + \sin((-x)^2) = -\sin(\pi x) + \sin(x^2) \Rightarrow$ weder noch

"=" ungerade + gerade "=" weder noch

Bsp. 9

$f(x) = (\sin^2(x))'$ gerade oder ungerade?

$f(x)$ "=" (ungerade · ungerade)' "=" (gerade)' "=" ungerade

Fourier Reihe

Für $f(x)$ mit Periode $2L$ gilt:

Def.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

In der Vorlesung

$$a_0 = \frac{1}{\cancel{2}L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$ ← Mittelwert der Funktion

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$ ← $n=0 \Rightarrow a_0$

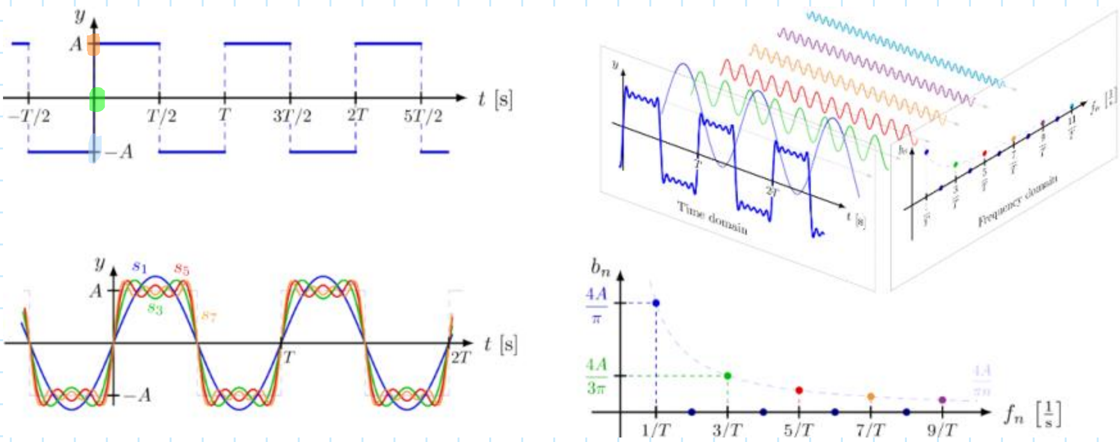
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

- Intuition:
- ein Signal kann als Linearkombination von Cosinus respektive Sinustermen dargestellt werden bei verschiedenen Frequenzen
- a_n bzw b_n sagen uns wie viel $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ bzw. $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
  ↳ hierbei kann n variieren und ist proportial zur Frequenz
- Um zu wissen wieviel cosinus bzw. sinus in unsere Funktion vorkommt, können wir Skalarprodukt verwenden

$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ (Skalarprodukt zweier Funktionen) $\Longleftrightarrow b_n = \underbrace{\frac{1}{L}}_{\text{Normalisierung}}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot \overbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}^{\text{Basisvektor}}dx$

(Parallele LT: Amplitude bei s gibt an wieviel e^{-st} in der Funktion vorkommt)

- Idee: Beliebige periodische Signale aus einem diskreten Frequenzspektrum superponieren:



Anwendungen (Fourier Analysis): 1) Signale analysieren ⇝ bestimmen welche Frequenzen in einem Signal vorkommen, um diese eventuell zu modifizieren (z.B Equalizer)

2) Quantenmechanik ⇝ Teilchen ist in eine Superposition von sogenannten "Eigenstates"

3) Partielle Differentialgleichungen lösen

Dirichlet-Theorem

$f(x)$ muss aber nicht unbedingt stetig sein. Jedoch konvergiert Fourier zu einem Grenzwert an den Unstetigkeiten und zwar:

linker/rechter Grenzwert

Def. $$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f^+(x_0)+f^-(x_0)\right) \qquad f^{\pm}(x_0) = \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$$

Def.

Falls $f(x)$ gerade:

- $b_n = 0$
- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$
- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Falls $f(x)$ ungerade:

- $a_0 = a_n = 0$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Orthogonalitätsrelationen

gilt nicht für Grenze 0–L

(1) $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases}0, & n\neq m\\ L, & n=m\neq 0\\ 2L, & n=m=0\end{cases}$

(2) $\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ L, & n=m\neq 0\end{cases}$

(3) $\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = 0$

Wichtige Eigenschaften: $\sin(n\pi)=0$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ (Seite 11 ZF)

- **Kochrezept:**

Gegeben $f(x)$ mit Periode p auf Definitionsbereich $\left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$

1) Bestimme L: $2L = p \to L = \frac{p}{2}$
2) f gerade/ungerade $\Rightarrow$ Vereinfachung der Fourier-Serie verwenden
3) Berechne a_0, a_n, b_n $\Rightarrow$ Tipp: Orthogonalität, Parität, Koeffizientenvergleich, trig. Identitäten oder partielle Integration
4) stelle $f(x)$ als Fourier-Reihe dar

8 Appendix

8.1 Umwandlungen

Gegeben: $n\in\mathbb{N}$

$$\sin(\pi n)=0\quad;\quad\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n}{2}}=\begin{cases}0, & n=2j+1\\(-1)^j, & n=2j\end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)(-1)^{\frac{n+2}{2}}=\begin{cases}0, & n=2j\\(-1)^j, & n=2j+1\end{cases}$$

$$\sin(x)\sin(nx)=\frac{1}{2}(\cos((1-n)x)-\cos((n+1)x))$$

$$\cos(x)\cos(nx)=\frac{1}{2}(\cos((n+1)x)+\cos((n-1)x))$$

$$\sin\left((n\pm1)\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left((n\pm1)\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$$

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$$

8.7 Trigonometrische Identitäten

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

etc.

Bsp. 10

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x)=\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

a) Show that it is periodic of period 2π. → haben wir schon gelöst

b) Compute its Fourier series.

c) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=?$$

1) Bestimme L: $p = 2\pi = 2L \Rightarrow L = \pi$

2) Gerade/Ungerade: $f(-x) = \left|\sin\left(\frac{-x}{2}\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = f(x) \Rightarrow$ gerade

3) Koeffizienten bestimmen: a_0, a_n, b_n

- $b_n = 0$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ für $x\in[0,\pi]$

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[-2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$

- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right|\cdot\cos\left(\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}x\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\cos(nx)\,dx$

trig. Identität

$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)x\right)+\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)x\right)}{\frac{1}{2}-n}-\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)}{\frac{1}{2}+n}\right]_0^{\pi}$

$= \cancel{-\frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{\frac{1}{2}-n}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}-n} - \cancel{\frac{1}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{\frac{1}{2}+n}} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}+n} = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}+\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}}{\frac{1}{4}-n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$

4) $f(x)$ als Fourier-Reihe darstellen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)$$

c) x_s so wählen, dass wir ähnliche Form erhalten wie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} \Rightarrow \cos(nx_s)=1 \Rightarrow x_s = 0, \pi, 2\pi\ldots$

Wir wählen $x_s=0$: $f(0) = \left|\sin\left(\frac{0}{2}\right)\right| = 0 = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Tipps Serie 4

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) Beschränktheitssatz: Was kann man zum Maximum/(Minimum) einer stetigen Funktion in einer einzelner Periode und über die ganze periodische Funktion aussagen?

b) Verwende die Definition der Ableitung (als Grenzwert einer Differenz) um $f'(x+P) = f'(x)$ zu beweisen.

c) Verwende die Aussage von a), b) und dann a)...

d) Zeig wie die Aussage von c) verletzt wird.

2) Wenn die Summe periodisch wäre würde gelten: $f(x+p) + g(x+p) = f(x) + g(x)$
Wann gilt diese Gleichung? Was kann kann über p aussagen in Bezug zu den Perioden P, Q der Funktionen (wir haben Beispiel hierzu in der Übungsstunde gesehen)?

3) a) Siehe Bsp. 3 (Woche 4)

b) Beschränktheitssatz

c) Siehe Bsp. 4 (Woche 4)

d) Siehe Bsp. 4 (Woche 4)

4) – Zuerst x bzw x^2 von $[-L, L)$ zeichnen (eine Periode)... Danach wiederholen (mehrere Perioden)

a) Sind f und/oder g stetig? Falls nein, besitzen sie einen linke und rechte Ableitung an den Unstetigkeiten.

b) Verwende die Skizze, um zu schauen wo f bzw. g unstetig ist.

c) Dirichlet: $\frac{1}{2}\left(f^+(x_k) + f^-(x_k)\right)$ x_k sind die Stellen, welche wir in b) bestimmt haben.

d) Werte Summe für die Stellen x_k, welche wir in b) bestimmt haben, aus und vergleiche mit Resultat aus c).

5) – Verwende Hint $\rightsquigarrow b_n = 0 \ \forall n$ (Wieso eigentlich?)

– 2.3 Fourier-Reihe (Page 3) ZF

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \cancel{b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}\right]$$

0

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad \text{wenn } n > 0$$

8.5 Allgemein Integral

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \\ 2L & \text{für } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ L & \text{für } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0 \quad \forall n, m$$

– $L = \pi$

– Kann man a_0 bestimmen ohne etwas konkret zu berechnen? (Tipp: Symmetrie)

– a_n ist mühsam zu berechnen:

→ Verwende:
- $\cos(x)\cdot\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$
- Partielle Integration
- Orthogonalität der trig. Funktionen