Periodische Funktion (Recap)

Eine Funktion ist periodisch, wenn ein $p \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$

Wichtige Eigenschaften

1. Periodische Funktion $f(x)$ mit Periode p, welche mit dem Faktor a gestaucht/gestreckt wird, ist $\frac{p}{a}$-periodisch

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(ax) = f\left(a\left(x + \frac{p}{a}\right)\right) \quad a \in \mathbb{R}}$

2. Die Linearkombination zweier periodischen Funktionen (f mit Periode p und g mit Periode q) ist ebenfalls periodisch und zwar mit der Periode $r = \text{kgV}(p,q)$)

Def. $\boxed{f(x) = f(x+p);\ g(x) = g(x+q) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x + \text{kgV}(p,q)) + bg(x + \text{kgV}(p,q))}$

Wie bestimmen wir eigentlich ob eine Funktion nicht periodisch ist:

- Beschränktheitssatz (boundedness theorem):

Def $\boxed{\text{Falls } f(x) \text{ periodisch und stetig ist, sind } f(x) \text{ und } f^{(n)}(x) \text{ begrenzt.}}$

korrekter

↝ gilt nur für stetige Intervalle
↝ keine Aussage für $\tan(x)$ möglich
↳ $\tan(x+\pi) = \tan(x) \Rightarrow \pi$-periodisch

Ist $\cos(x^3)$ periodisch?

Annahme: Falls $f(x) = \cos(x^3)$ periodisch $\Rightarrow$ begrenzt $\Rightarrow$ f' auch begrenzt

$f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 \Rightarrow$ nicht begrenzt $\Rightarrow$ nicht periodisch

Bestimme die Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$

① Wir verwenden Eigenschaft 3 bzw. Beispiel 2:

↳ Periodizität der Summanden bestimmen: • $\sin(3x) \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$-periodisch
• $\cos(5x) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}$-periodisch

② Wir verwenden Eigenschaft (4):

↳ Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$: $\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$-periodisch

$\text{kgV}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$

Methode 1 (Vorlesung):

① Gleichnamig machen:
$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{5};\ \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{3}{3} \Leftrightarrow \frac{10\pi}{15};\ \frac{6\pi}{15}$

② kgV von Zahler (Koefficienten)
$\text{kgV}(10,6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
↳ $10 \mathrel{\hat{=}} 2\ 5$
$6 \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot 3$

③ Kürzen falls nötig:
$\frac{30\pi}{15} = 2\pi$

Methode 2 (Ich):

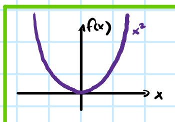
① kgV des Zähler:
$\text{kgV}(2\pi, 2\pi) = 2\pi$ (Oft 2π ausser wir haben un Faktor kleiner 1 im Sinus/cosinus)

② ggT der Nenner
$\text{ggT}(3,5) = 1$
$3 \mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 3$
$5 \mathrel{\hat{=}} 1 \cdot 5$

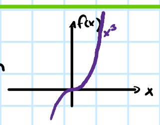
③ kgV durch ggT teilen
$\frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Gerade/Ungerade Funktion (Recap)

Def
- $f(x)$ ist gerade, falls $f(-x) = f(x)$
- $f(x)$ ist ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$



- Gerade Funktion
↳ spiegelsymmetrisch



- Ungerade Funktion
↳ punktsymmetrisch

Eigenschaften:
- $f(x)$ ist gerade: $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx$
- $f(x)$ ist ungerade: $\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0$
- gerade · gerade "=" gerade
- ungerade · ungerade "=" gerade
- ungerade · gerade "=" ungerade
- gerade + gerade "=" gerade
- ungerade + ungerade "=" ungerade
- (gerade)' = ungerade
- (ungerade)' = gerade

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ gerade oder ungerade?

$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x) \Rightarrow$ gerade
"=" gerade + gerade "=" gerade

Fourier Reihe (Recap)

Fur $f(x)$ mit Periode $2L$ gilt:

Def.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

In der Vorlesung

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \leftarrow \text{Mittelwert der Funktion}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad \leftarrow n=0 \Rightarrow a_0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

Def.

Falls $f(x)$ gerade:
- $b_n = 0$
- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$
- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Falls $f(x)$ ungerade:
- $a_0 = a_n = 0$
- $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$.

(a) Show that it is periodic of period 2π ↝ haben wir schon gelöst ✓

b) Compute its Fourier series.

c) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = ?$$

1) Bestimme L: $p = 2\pi = 2L \Rightarrow L = \pi$

2) Gerade/Ungerade: $f(-x) = |\sin(\frac{-x}{2})| = |-\sin(\frac{x}{2})| = |\sin(\frac{x}{2})| = f(x) \Rightarrow$ gerade

3) Koeffizienten bestimmen: a_0, a_n, b_n

- $b_n = 0$

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin(\frac{x}{2})|\,dx \overset{\sin(\frac{x}{2}) = |\sin(\frac{x}{2})| \text{ für } x \in [0,\pi]}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\frac{x}{2})\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-2\cdot\cos(\frac{x}{2})\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$

- $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin(\frac{1}{2}x)|\cdot\cos(\frac{n\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\frac{1}{2}x)\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$

4) $f(x)$ als Fourier-Reihe darstellen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)$$

c) x_s so wahlen, dass wir ahnliche Form erhalten wie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} \Rightarrow \cos(nx_s) = 1 \Rightarrow x_s = 0, \pi, 2\pi \ldots$

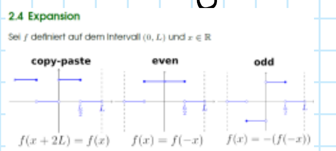
Wir wahlen $x_s = 0$: $f(0) = |\sin(\frac{0}{2})| = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

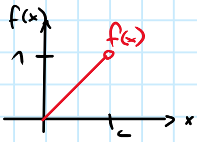
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

Half-Range Expansion

Eine Funktion, die nur auf einem begrenzten Intervall definiert ist, lässt sich periodisch auf einen grösseren Intervall erweitern. Üblicherweise wird der begrenzte Intervall als halbe Periode definiert.

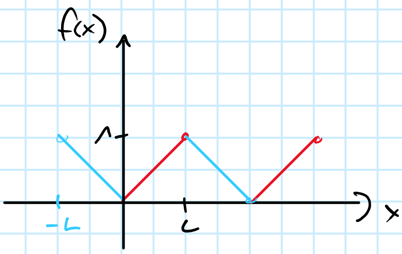


Bsp. 1



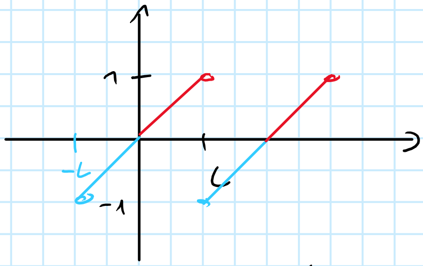
• $f(x) = x \quad x \in [0, L)$

• even-expansion



↳ spiegelsymmetrisch (y-Achse)

• odd-expansion



↳ punktsymmetrisch (Ursprung)

Approximieren durch trigonometrische Polynome

Eine Fourier-Reihe N-ter Ordnung, auch sogenanntes trigonometrisches Polynom, ist eine Approximation und hat einen quadratischen Fehler E^* im Vergleich zur ursprünglichen Funktion.

Def. $\boxed{E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right)}$ ⤳ Der Fehler wird mit N kleiner ⤳ macht Sinn

Komplexe Fourier-Reihe

Ausgehend von der normalen Fourier Reihe: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$

kann man die äquivalente komplexe Fourier Reihe herleiten, indem man die Euler-Beziehung: $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

verwendet: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \cdot e^{i\frac{n\pi}{L}x}$ (Details im Vorlesungsskript)

Für eine 2L-periodische Funktion ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

Def. $$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{i\pi n}{L}x} = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n}{L}x} \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot e^{-\frac{i\pi n}{L}x}\,dx \quad \text{und } c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx}$$

Die reale und komplexe Fourier Reihe enthalten die genau gleichen Informationen und man kann die Koeffizienten einfach umrechnen:

Def.
- $a_0 = c_0$; $a_n = c_n + c_{-n}$ (anstatt $n \to -n$) ; $b_n = i(c_n - c_{-n})$
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Oft sind folgende Relationen hilfreich für komplexe Fourier-Reihen:

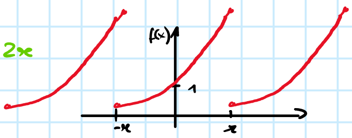
$$\boxed{e^{i\pi} = -1 \; ; \; e^{\pm i n\pi} = (-1)^n}$$

Manchmal sind auch folgende Beziehungen hilfreich:

$e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x)$; $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x)$; $e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i\sin(x)$

Bsp. 2

geg: $f(x) = e^x$ für $-\pi < x < \pi$ mit Periode 2π



Berechne komplexe Fourier-Reihe

1) Bestimme L: $2L = p = 2\pi \Rightarrow L = \pi$

2) Bestimme Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-in)}\left[e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left[e^{\pi}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n} - e^{-\pi}\cdot\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(-1)^n\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{1}{\pi}(-1)^n \sinh(\pi)\frac{1}{1-in}$$

$$= \frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n\frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

3) Komplexe Fourier-Reihe zusammensetzen: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n$ //

Koeffizienten der Fourier-Reihe a_0, a_n, b_n bestimmen:

$$a_0 = c_0 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \quad //$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left((-1)^n\cdot\frac{1+in}{1+n^2} + (-1)^{-n}\cdot\frac{1+i(-n)}{1+(-n)^2}\right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n\frac{2}{1+n^2} \quad //$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}\left((-1)^n\cdot\frac{1+in}{1+n^2} - (-1)^{-n}\cdot\frac{1+i(-n)}{1+(-n)^2}\right) = i\frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n\frac{2in}{1+n^2}$$

$$= \frac{\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{2n}{1+n^2} \quad //$$

Bsp 3.

Prüfungsaufgabe Winter 2023

1.MC4 **[3 Points]** The complex Fourier series of the function $\cosh(ax)$ on the interval $[-\pi, \pi]$ is given by

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n a\sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)}e^{inx}.$$

Find the value of the numerical series

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)}$.

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$.

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{2\pi}{a\sinh(a\pi)} - \frac{2}{a^2}$.

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{2\pi}{a\sinh(a\pi)}$.

Wir wählen x so aus, dass wir eine möglichst ähnliche Form wie in der gesuchten numerischen Reihe erreichen. Zudem sollten wir cosh(ax) an dieser Stelle kennen $\Rightarrow x = 0$.

$$\cosh(ax) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n a\sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)}e^{inx}$$

$$\cosh(a\cdot 0) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n a\sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)}\underbrace{e^{in0}}_{1} = \frac{a\sinh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

$$\frac{\pi}{a\sinh(a\pi)} = \frac{1}{a^2} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} \overset{\text{symmetrisch bezüglich } n}{=} \frac{1}{a^2} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{-n}}{(-n)^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a\sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad //$$

Tipps Serie 5

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$

b) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$

c) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$

d) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$

e) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$. (Tipp: $e^{ix} = \cos x + i\sin(x)$)

2) a) Benütze die Vereinfachung der Fourier-Reihe, die für gerade Funktionen gültig ist (Bsp. 10 (Woche 4))

Tipp: Fallunterscheidung: • gerade: $n = 2k$ • ungerade: $n = 2k+1$

b) Benütze die Vereinfachung der Fourier-Reihe, die für ungerade Funktionen gültig ist. (Bsp. 10 (Woche 4))

Tipp: Fallunterscheidung: • gerade: $n = 2k$ • ungerade: $n = 2k+1$

3) a) "Copy-paste"-exponsion

b) Überprüfe ob die Funktion gerade/ungerade ist. Benütze eine Vereinfachung falls möglich. (Bsp. 10 (Woche 4))

c) Für welche x ist $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = (-1)^n$ (Fallunterscheidung notwendig für verschiedene n)

4) c_n und c_0 mit Formel bestimmen und benutze die Beziehungen zwischen a_n, b_n, c_n (Bsp. 2 (Woche 5))

↳ evt. hilfreich: $\boxed{e^{i\pi} = -1 \;;\; e^{\pm in\pi} = (-1)^n}$