

Periodische Funktion (Recap)

Eine Funktion ist periodisch, wenn ein $p \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

Def. $f(x) = f(x+p) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Wichtige Eigenschaften

1. Periodische Funktion $f(x)$ mit Periode p , welche mit dem Faktor a gestaucht/gestreckt wird, ist $\frac{1}{a}$ -periodisch

Def. $f(x) = f(x+p) \Rightarrow f(ax) = f(x + \frac{p}{a}) \quad a \in \mathbb{R}$

2. Die Linearkombination zweier periodischen Funktionen (f mit Periode p und g mit Periode q) ist ebenfalls periodisch und zwar mit der Periode $r = \text{kgV}(p, q)$

Def. $f(x) = f(x+p); g(x) = g(x+q) \Rightarrow af(x) + bg(x) = af(x + \frac{p}{a}) + bg(x + \frac{q}{b})$

Wie bestimmen wir eigentlich ob eine Funktion nicht periodisch ist:
• Beschränktheitsatz (boundedness theorem):

Def. Falls $f(x)$ periodisch und stetig ist, sind $f(x)$ und $f'(x)$ beschränkt.
korrekter

Ist $\cos(x^3)$ periodisch?

Annahme: Falls $f(x) = \cos(x^3)$ periodisch $\Rightarrow$ beschränkt $\Rightarrow f'$ auch beschränkt
 $f'(x) = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 \Rightarrow$ nicht beschränkt $\Rightarrow$ nicht periodisch

Bestimme die Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$

Wir verwenden Eigenschaft 3 bzw. Beispiel 2:

$\hookrightarrow$ Periodizität der Summanden bestimmen: $\sin(3x) \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ -periodisch
 $\cos(5x) \Rightarrow \frac{2\pi}{5}$ -periodisch

Wir verwenden Eigenschaft (4):

$\hookrightarrow$ Periodizität von $2\sin(3x) + 4\cos(5x)$: $\text{kgV}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5})$ -periodisch

Methode 1 (Vorlesung):

① Gleichnamig machen:

$$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{5}; \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{10\pi}{15}; \frac{6\pi}{15}$$

② kgV von Zählern (Koeffizienten)

$$\text{kgV}(10, 6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\hookrightarrow 10 \hat{=} 2 \cdot 5$$

$$6 \hat{=} 2 \cdot 3$$

③ Kürzen falls nötig:

$$\frac{30\pi}{15} = 2\pi$$

Methode 2 (IdK):

① kgV des Zählers:

$$\text{kgV}(2\pi, 2\pi) = 2\pi$$

② ggT der Nenner

$$\text{ggT}(3, 5) = 1$$

$$3 \hat{=} 1 \cdot 3$$

$$5 \hat{=} 1 \cdot 5$$

③ kgV durch ggT teilen

$$\frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

(Offt 2 π ausser wenn haben um Faktor kleiner als sin/cos)

$\hookrightarrow$ gilt nur für stetige Intervalle
 $\hookrightarrow$ keine Aussage für $\tan(x)$ möglich
 $\hookrightarrow \tan(x+\pi) = \tan(x) \Rightarrow \pi$ -periodisch

Gerade/Ungerade Funktion (Recap)

- Def.
- $f(x)$ ist gerade, falls $f(x) = f(-x)$
 - $f(x)$ ist ungerade, falls $f(x) = -f(-x)$



• Gerade Funktion
 $\hookrightarrow$ spiegelsymmetrisch



• Ungerade Funktion
 $\hookrightarrow$ punktsymmetrisch

Eigenschaften:

• $f(x)$ ist gerade: $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$

• $f(x)$ ist ungerade: $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$

- gerade $\cdot$ gerade $=$ gerade
- ungerade $\cdot$ ungerade $=$ gerade
- ungerade $\cdot$ gerade $=$ ungerade
- gerade $+$ gerade $=$ gerade
- ungerade $+$ ungerade $=$ gerade
- (gerade)' = ungerade
- (ungerade)' = gerade

Fourier Reihe (Recap)

Für $f(x)$ mit Periode $2L$ gilt:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

in der Vorlesung
 $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $\leftarrow$ Mittelwert der Funktion

Def.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n=0 \Rightarrow a_0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ gerade oder ungerade?

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x) \Rightarrow \text{gerade}$$

"=" gerade + gerade "=" gerade

Falls $f(x)$ gerade:

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Falls $f(x)$ ungerade:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Def.

Prüfungsaufgabe Winter 2020

Consider the function $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(a) Show that it is periodic of period 2π

b) Compute its Fourier series.

c) Use the previous result to find the following numerical series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = ?$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi} \left[-2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}$$

d) $f(x)$ als Fouriers-Reihe darstellen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(nx)$$

1) Bestimme L : $\pi \cdot 2\pi = 2L \Rightarrow L = \pi$

2) Gerade/Ungerade: $f(-x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -f(x) \Rightarrow$ gerade

3) Koeffizienten bestimmen: a_0, a_n, b_n
 $b_n = 0$

c) x so wählen, dass wir ähnliche Form erhalten wie $\frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow \cos(nx) = 1 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \dots$

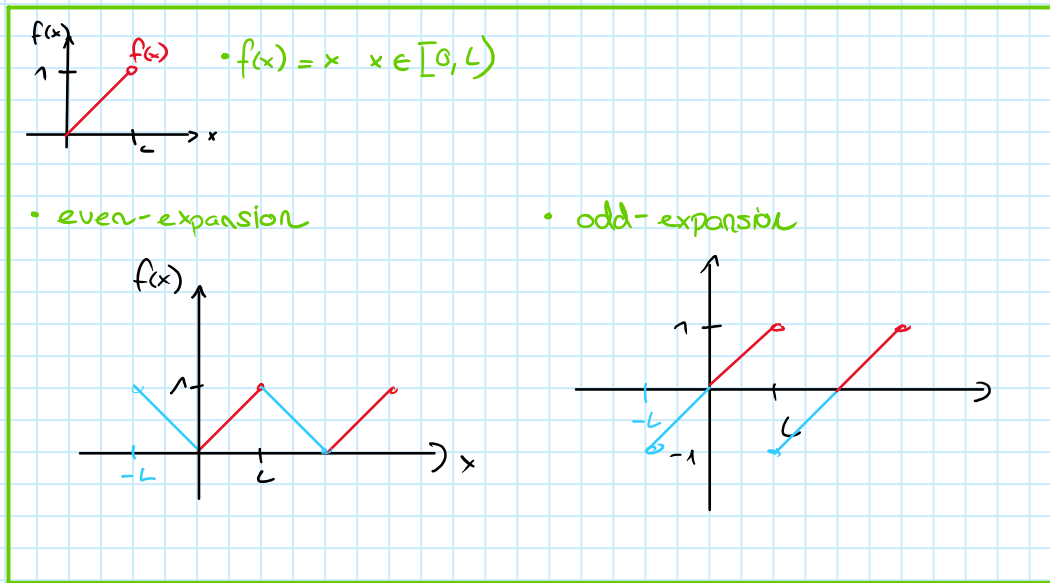
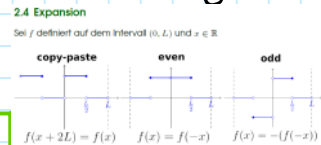
Wir wählen $x=0$: $f(0) = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

Half-Range Expansion

Eine Funktion, die nur auf einem begrenzten Intervall definiert ist, lässt sich periodisch auf einen grösseren Intervall erweitern. Üblicherweise wird das begrenzte Intervall als halbe Periode definiert.



Bsp. 1

Approximieren durch trigonometrische Polynome

Eine Fourier-Reihe N -ter Ordnung, auch sogenanntes trigonometrisches Polynom, ist eine Approximation und hat einen quadratischen Fehler E^* im Vergleich zur ursprünglichen Funktion.

Def. $E^* = \int_{-L}^L f^2(x) dx - x(2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2))$ $\rightarrow$ Der Fehler wird mit N kleiner $\rightarrow$ macht Sinn!

Komplexe Fourier-Reihe

Ausgehend von der normalen Fourier Reihe: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)]$

kann man die äquivalente komplexe Fourier Reihe herleiten, indem man die Euler-Beziehung: $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ verwendet:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

(Details im Vorlesungsskript)

Für eine $2L$ -periodische Funktion ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben als:

Def. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{n\pi}{L}x} = c_0 + \sum_{n \neq 0} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$ mit $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cdot e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx$ und $c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$

Die reale und komplexe Fourier Reihe enthalten die genau gleichen Informationen und man kann die Koeffizienten einfach umrechnen:

Def.

- $a_0 = c_0$; $a_n = c_n + c_{-n}$; $b_n = i(c_n - c_{-n})$
- $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$; $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Oft sind folgende Relationen hilfreich für komplexe Fourier-Reihen:

$$e^{ix} = -1 ; e^{\pm in\pi} = (-1)^n$$

Manchmal sind auch folgende Beziehungen hilfreich:

$$e^{ix} + e^{-ix} = \cos(x) ; e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin(x) ; e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$$

geg: $f(x) = e^x$ für $-\pi < x < \pi$ mit Periode 2π

Berechne komplexe Fourier-Reihe



Bsp. 2

Koeffizienten der Fourier-Reihe a_0, a_n, b_n bestimmen.

Prüfungsaufgabe Winter 2023

1.MC4 [3 Points] The complex Fourier series of the function $\cosh(ax)$ on the interval $[-\pi, \pi]$ is given by

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n a \sinh(a\pi)}{\pi(n^2 + a^2)} e^{inx}.$$

Find the value of the numerical series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$$

(A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a \sinh(a\pi)}.$

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a \sinh(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}.$

(C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{2\pi}{a \sinh(a\pi)} - \frac{2}{a^2}.$

(D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{2\pi}{a \sinh(a\pi)}.$

Bsp 3.

Tipps Serie 5

⚡ = wichtig

⚡ = hilfreich

⚡ = nicht so wichtig

- 1) a) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$
b) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$
c) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$
d) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$
e) Bestimme $f(-x)$, vereinfache den Ausdruck und vergleiche den Ausdruck mit $\pm f(x)$. (Tipp: $e^{ix} = \cos x + i \sin(x)$)
- 2) a) Benütze die Vereinfachung der Fourier-Reihe, die für gerade Funktionen gültig ist (Bsp. 10 (Woche 4))
Tipp: Fallunterscheidung: • gerade: $n = 2k$ • ungerade: $n = 2k+1$
b) Benütze die Vereinfachung der Fourier-Reihe, die für ungerade Funktionen gültig ist. (Bsp. 10 (Woche 4))
Tipp: Fallunterscheidung: • gerade: $n = 2k$ • ungerade: $n = 2k+1$
- 3) a) "Copy-paste"-expansion
b) Überprüfe ob die Funktion gerade/ungerade ist. Benütze eine Vereinfachung falls möglich. (Bsp. 10 (Woche 4))
c) Für welche x ist $\sin(\frac{n\pi}{2} x) = (-1)^n$ (Fallunterscheidung notwendig für verschiedene n)
- 4) c_n und c_0 mit Formel bestimmen und benutze die Beziehungen zwischen a_n, b_n, c_n (Bsp. 2 (Woche 5))
↳ ut. hilfreich: $e^{i\pi} = -1$; $e^{\pm i n \pi} = (-1)^n$