Fourier Integral

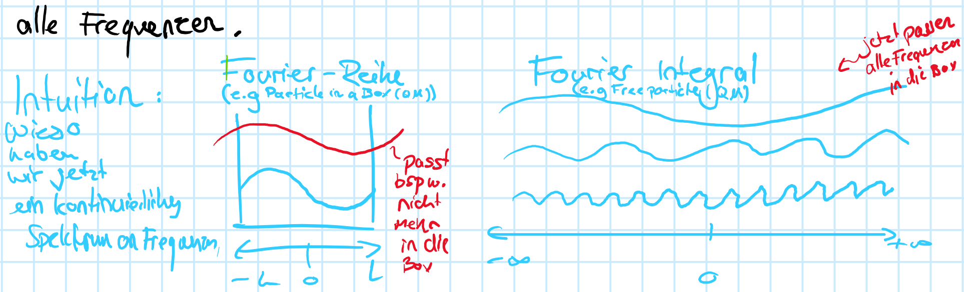
Das Fourier Integral von einer Funktion $f(x)$ ist gegeben als:

Def.
$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right] d\omega \qquad A(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cdot\cos(\omega v)\, dv \qquad B(\omega) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(\omega v)\, dv$$

Bedingungen: I piecewise continuous / stückweise stetig
II linke und rechte Ableitungen existieren
III Absolut integrierbar $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty\right)$

Das Fourier Integral kann als Erweiterung zur Fourier-Reihe angesehen werden, welche jetzt auch für nicht-periodische Funktionen funktioniert. $\left(\begin{smallmatrix} L \to \infty \\ \Delta\omega \to 0\end{smallmatrix}\right)$

Indem wir die Periode von $2L$ auf ∞ ändern, erhalten wir von der Fourier-Reihe $F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ das Fourier Integral $F(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cdot\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)d\omega$ (Herleitung im Skript). Achtung: Jetzt brauchen wir anstatt ein diskretes Spektrum an Frequenzen ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen, Daher wird die Summe über alle Frequenzen zu einem Integral über alle Frequenzen.



Je nach Parität unserer Funktion können wir gewisse Vereinfachungen einführen.

Für gerade Funktionen gilt:

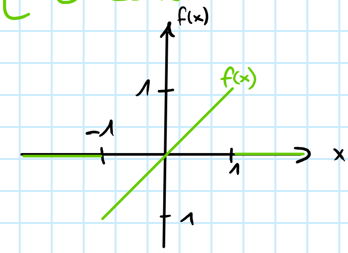
Def
$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(\omega v)\,dv \qquad B(\omega) = 0$$
$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega$$

Für ungerade Funktionen:

Def
$$A(\omega) = 0 \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cdot\sin(\omega v)\,dv$$
$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\sin(\omega x)\, d\omega$$

Bsp. 1

Berechne das Fourier Integral der Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



① f(x) gerade oder ungerade?

$f(-x) = -x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade

↳ Wir können die Vereinfachung für ungerade Funktionen verwenden

② Koeffizienten berechnen

$A(\omega) = 0$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin(\omega v)\,dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 v\sin(\omega v)\,dv + \cancel{\int_1^\infty 0\,dv}^{\,0}$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}v\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega v)\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\int_0^1 \cos(\omega v)\,dv$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi\omega}\cos(\omega) + 0\right]_0^1 + \frac{2}{\pi\omega^2}\left[\sin(\omega v)\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi\omega}\cos(\omega) + \frac{2}{\pi\omega^2}\sin(\omega) = \frac{2}{\pi\omega^2}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)$$

③ Fourier Integral bestimmen ⇝ müssen die Integrale selten auswerten

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega^2}\left(\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)\right)\sin(\omega x)\,d\omega$$

Fourier Transformation

Wenn wir jetzt alle sin- und cos-Terme durch Eulerschreibweise ersetzen, können wir vom Fourier Integral aus das komplexe Fourier Integral herleiten. Das komplexe Fourier Integral beschreibt die (Inverse) Fourier Transformation. Man kann es sich auch als kontinuierlich und nicht periodische alternative zur komplexe Fourierreihe vorstellen und kann FT auch hier wieder mit $L \to \infty$ bzw $\omega_n \to 0$ herleiten.

Die Fourier Transformation wird wie folgt definiert:

Def
$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\}(s) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt \quad \omega \in \mathbb{R}}$$

Man kann auch eine Inverse bestimmen:

Def
$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega}$$

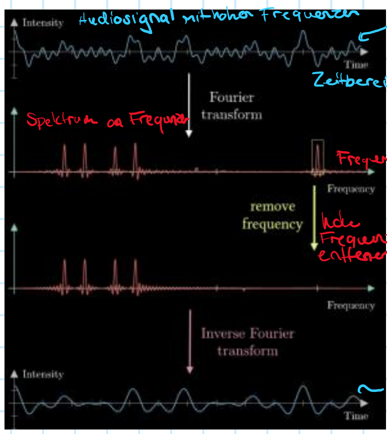
manchmal anstatt t auch x

sehen wir bald

Anwendung: · Lösen von gewöhnlichen und partiellen DGL's

• Bild-/Audiobearbeitung

nicht mehr periodisch FR ↳ FT anstatt FR



Audio signal ohne hohe Frequenzen

Bsp. 2

Prüfungsaufgabe Winter 2016

Bestimme Fourier Transform von der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} \cancel{0}\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-i\omega x}\,dx + \int_{1}^{\infty}\cancel{0}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx - \int_{-1}^{1} x^2\cdot e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \left[\left(x^2\left(-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega x}\right)\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{+1}{i\omega}\right)\int_{-1}^{1} 2x\, e^{-i\omega x}\,dx\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{i\omega}\left(\cancel{e^{i\omega}} - \cancel{e^{-i\omega}}\right) + \frac{1}{i\omega}\left(\cancel{e^{-i\omega}} - \cancel{e^{i\omega}}\right) - 2\left[\left(\frac{1}{\omega^2}x\,e^{-i\omega x}\right)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega x}\,dx\right]\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{\omega^2}\left(1\cdot e^{i\omega} - (-1)e^{-i\omega}\right) + \left(\frac{1}{i\omega^3}e^{-i\omega x}\right)\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right) + \frac{2}{\omega^3}\,\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega) + \frac{2}{\omega^3}\sin(\omega)\right) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3} \quad \text{für } \omega\neq 0$$

für $\omega = 0$: $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{für } \omega = 0 \\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3} & \text{, sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften der Fourier Transformation

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\,\mathcal{F}\{f(x)\} + \beta\,\mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x-shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ia\omega}\,\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t-shifting, aber ohne Heaviside
- ω-shift: $\underbrace{\mathcal{F}(\omega-a)}_{\hat{f}(\omega-a)} = \mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\}$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega\,\mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2\,\mathcal{F}\{f(x)\}$ ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -i\,\mathcal{F}\{x\cdot f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie bei Laplace mit i etc.
- Faltung (Convolutions): $\mathcal{F}\{f*g\} = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}$ wird noch auf ZF ergänzt; auch ähnlich wie bei Laplace aber $\sqrt{2\pi}$-Term

Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\,dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ak^2+bk+c)}\,dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

1.MC3 [3 Points] Solve the following integral equation using the Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)g(y)\,dy = e^{-4x^2},$$

where

$$g(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

(A) $f(x) = \frac{1}{8i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{8}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

(B) $f(x) = \frac{1}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{8}} \sin(\omega) e^{i\omega x}\,d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{8i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{16}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\omega^2}{16}} \frac{\omega}{\sin(\omega)} e^{i\omega x}\,d\omega.$

1.8 Convolution (Faltung)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

2.9 Fourier Transform

$$\mathfrak{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f) \cdot \mathfrak{F}(g)$$

$$\mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(f \cdot g)$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx}\,dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $a=4$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)}\,dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt}$$

x/t je nach Aufgabe

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x}\,d\omega}$$

$$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2 \mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$

	$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
3)	$\begin{cases} 1, & \lvert x\rvert < 1, \\ 0, & \lvert x\rvert > 1. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$

Auf der ersten Seite der Prüfung hats eine ZF, welche gewisse LT, FT und Integrale die man verwenden kann. → Nicht vergessen!

Bsp. 3

$$F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)\,g(y)\,dy\right\} = F\left\{e^{-4x^2}\right\}$$

$$F\left\{\frac{df}{dx} * g(x)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} e^{-i\omega x}\,dx$$

$$\sqrt{2\pi}\,F\left\{\frac{df}{dx}\right\} \cdot F\{g(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\cdot 4}} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

$$\cancel{\sqrt{2\pi}}\, i\cancel{\omega}\, F\{f(x)\} \cdot \sqrt{\frac{2}{\cancel{\pi}}}\, \frac{\sin(\omega)}{\cancel{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}} \sqrt{\frac{\cancel{\pi}}{4}}$$

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{2i\sqrt{8}}\, e^{-\frac{\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}$$

$$f(x) = \cancel{F}^{-1}\left\{\cancel{F}\{f(x)\}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i\sqrt{8}}\, e^{\frac{-\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}\, e^{i\omega x}\,d\omega = \underline{\underline{\frac{1}{8i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{16}}\, \frac{1}{\sin(\omega)}\, e^{i\omega x}\,d\omega}}$$

C

Fourier (Recap)

Für periodische Funktionen

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Fourier-Reihe ⟷ **komplexe Fourier Reihe**

$\cos x + \sin x \Leftrightarrow e^{ix}$ (nur andere Darstellung)

$a_n + b_n \Leftrightarrow c_n$

$$F(x) = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{n\pi i x}{L}}$$

$a_n + b_n \Updownarrow A(\omega) + B(\omega)$

$p = 2L$ (diskret) $\Updownarrow$ $p = \infty$ (kontinuierlich)

$c_n \Updownarrow \hat{f}(\omega)$

$p = 2L \Updownarrow p = \infty$

diskret $\Updownarrow$ kontinuierlich

Für (nicht) periodische Funktionen

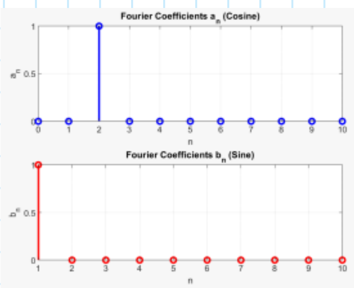
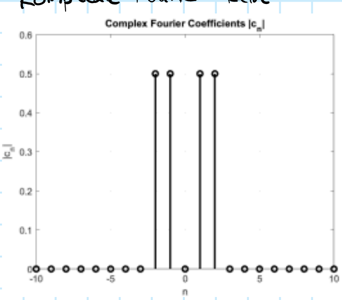
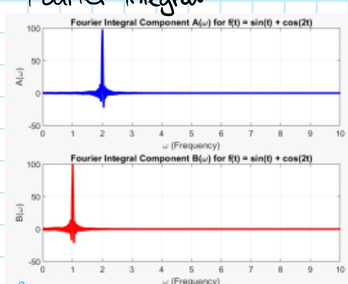
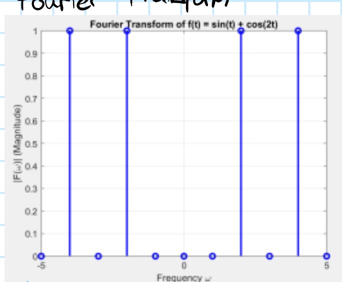
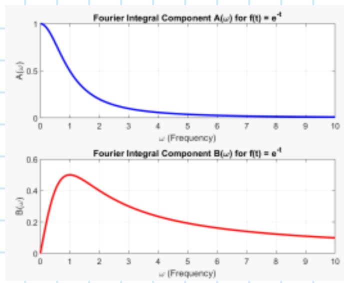
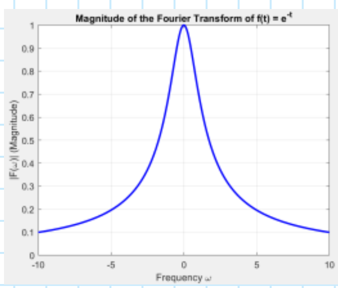
Fourier Integral ⟷ **Fourier Transformation (Inverse)**

$$F(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\,dx$$

$\cos x + \sin x \Leftrightarrow e^{ix}$ (nur andere Darstellung)

$A(\omega) + B(\omega) \Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\,d\omega$$

	Fourierreihe	komplexe Fourier-Reihe	Fourier Integral	Fourier Transform
periodisch $\sin t + \cos 2t$			 ↳ keine genaue Lösung, numerische Approximation	 ↳ wurde diskretisiert
nicht periodisch e^{t}	X	X		

Zusammenhang Fourier Transform und Laplace Transform

Laplace Transform

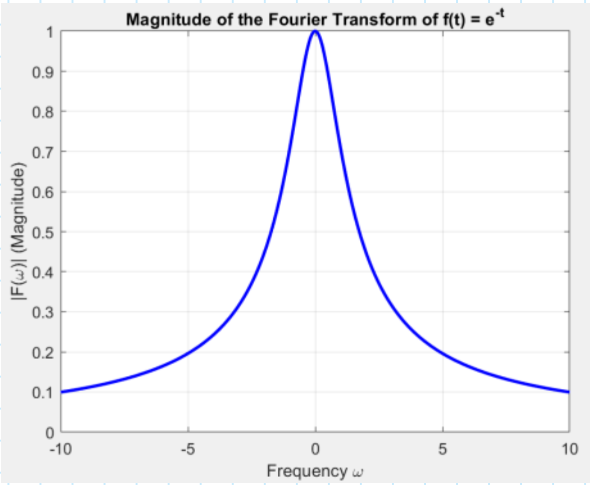
$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

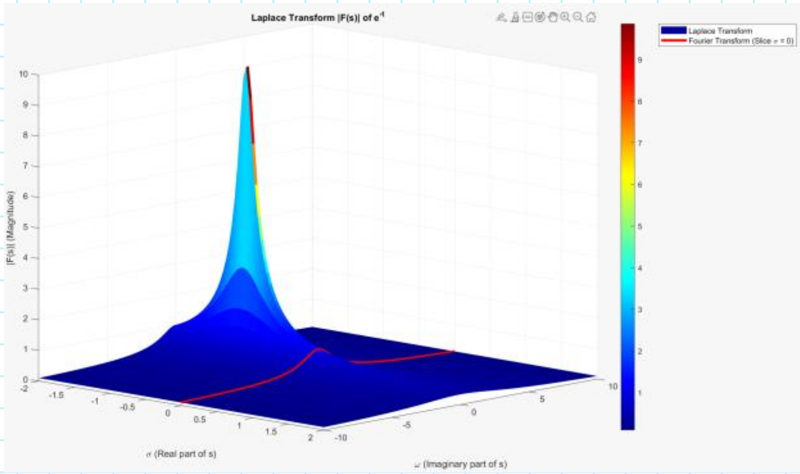
Fourier Transform

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Unterschiede:
- Fourier hat ein Skalierungsterm (Normalisierungsterm)
- Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt$, da wir hier $f(t<0)=0$ angenommen haben (→ konnte man machen)
- Fourier Transform ist ein Spezialfall vom Laplace Transform mit:
  - ↳ Bei welcher σ gleich 0 gesetzt. Hierbei ist σ der Realteil von s
    ($\overset{LT}{s} = \cancel{\sigma}^{0} + i\omega = \overset{FT}{i\omega}$)
  - ↳ Bei welche wir mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ skalieren

→ sprich Fourier Transform ist ein 2D-Schnitt entlang der imaginären Achse von der s-Domäne und dann noch skaliert.



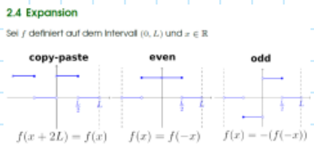


Tipps Serie 6

= wichtig
= hilfreich
= nicht so wichtig

1) a) Copy-paste expansion

(Recap: Fourierreihe)



b) - Gerade / ungerade Funktion?

- Bestimme die Koeffizienten a_0, a_n, b_n. Benutze die Vereinfachung durch Parität
- Musterlösung bestimmt Koeffizienten von g' und vergleicht mit Fourierskoeffizienten von (Aufgabe 3b (Serie 5)) ⇝ bisschen random

c) - Berechne den Wert der gegebenen Summe. Welche Stelle x_0 müssen wir betrachten, um die Summe darzustellen.

- Versuche $(-1)^n$ und $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ zu eliminieren. Hint: $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$

2) a) - Um c_n zu berechnen, ist es einfacher cosinus hyperbolicus in der Exponentialschreibweise

(Recap: Komplexe Fourierreihe)

↳ $\cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$

- Um die Terme dann zu vereinfachen, kann man folgende Beziehungen verwenden:

↳ $\sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ und $e^{\pm i\pi n} = (-1)^n$

- Ähnlich wie Bsp. 2 (Woche 5)

b) - Verändere Resultat aus 2a), so dass wir die gegebene Summe erhalten

- x_0 so auswählen, so dass wir möglichst ähnlichen Ausdruck erhalten
- x_0 so wählen, dass wir $\cosh(ax_0)$ kennen.
- Summe symmetrisch bezüglich n ⇝ so wir können es aufteilen (identisch zu Bsp. 3 (Woche 5))

3) a) - Gerade / ungerade Funktion?

(Recap: Fourierreihe)

- Bestimme die Koeffizienten a_0, a_n, b_n. Benütze die Vereinfachung durch Parität

b) Wähle x_0, so dass die Fourierreihe eine ähnliche Form hat wie die gegebene Summe

- Sehr ähnlich wie (Bsp. 10 (Woche 4))

4) - Gerade / ungerade Funktion?

- Bestimme die Koeffizienten $A(\omega), B(\omega)$. Benutze die Vereinfachung durch Parität.

5) a) Für welche ω brauchen wir eine Fallunterscheidung?

b) Nachdem das Integral ausgewertet wurde, verwende die Eulerbeziehungen, um die komplexen Exponentialfunktionen als trigonometrische Funktionen darzustellen.