

Fourier Integral

Das Fourier Integral von einer Funktion $f(x)$ ist gegeben als:

Def.

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)] d\omega$$

$$A(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(\omega v) dv$$

$$B(\omega) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(\omega v) dv$$

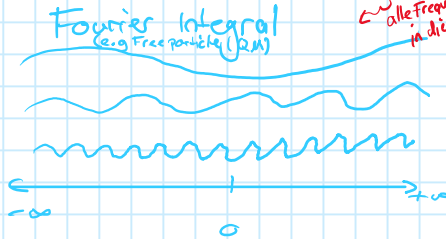
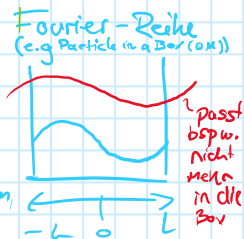
- Bedingungen:
- I piecewise continuous / stückweise stetig
 - II linke und rechte Ableitungen existieren
 - III Absolut integrierbar ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$)

Das Fourier Integral kann als Erweiterung zur Fourier-Reihe angesehen werden, welche jetzt auch für nicht-periodische Funktionen funktioniert. ($L \rightarrow \infty$, $\frac{2\pi}{L} \rightarrow 0$)

(Indem wir die Periode von $2L$ auf ∞ ändern, erhalten wir von der Fourier-Reihe $F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ das Fourier Integral $F(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cdot \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$ (Herleitung im Skript). Achtung: Jetzt brauchen wir anstatt ein diskretes Spektrum an Frequenzen ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen, Daher wird die Summe über alle Frequenzen zu einem Integral über alle Frequenzen.

Intuition:

Wie so haben wir jetzt ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen.



Je nach Parität unserer Funktion können wir gewisse Vereinfachungen einführen.

Für gerade Funktionen gilt:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos(\omega v) dv \quad B(\omega) = 0$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

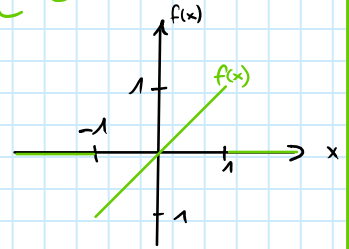
Def

Für ungerade Funktionen:

$$A(\omega) = 0 \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cdot \sin(\omega v) dv$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

Berechne das Fourier Integral der Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Bsp. 1

Fourier Transformation

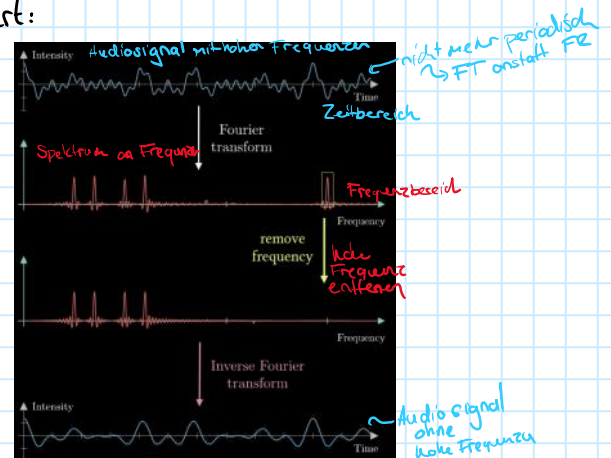
Wenn wir jetzt alle sin- und cos-Terme durch Eulerschreibweise ersetzen, können wir vom Fouriers Integral aus das komplexe Fouriers Integral herleiten. Das komplexe Fourier Integral beschreibt die (inverse) Fourier Transformation. Man kann es sich auch als kontinuierlich und nicht periodische alternative zur komplexen Fourierreihe vorstellen und kann FT auch hier wieder mit $k \rightarrow \omega$ bzw. $\omega_k \rightarrow \omega$ herleiten. Die Fourier Transformation wird wie folgt definiert:

Def
$$F\{f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Man kann auch eine Inverse bestimmen:

Def
$$f(t) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Anwendung: Lösen von gewöhnlichen und partiellen DGL's
• Bild-/Audioverarbeitung



Prüfungsaufgabe Winter 2016

Bestimme Fourier Transform von der Funktion $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

Bsp. 2

Eigenschaften der Fourier Transformation

Wie beim Laplace Transform können wir gewisse Eigenschaften verwenden, um Rechnungen zu vereinfachen.

- Linearität: $\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}$ analog zu Laplace
- x-shift: $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-ia\omega} \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega)$ ähnlich wie t-shifting, aber ohne Heaviside
- ω -shift: $\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega-a)$
 $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega-a)$
- Ableitungen im Zeitbereich: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(x)\}$; $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{f(x)\}$ } ähnlich wie bei Laplace aber ohne Anfangsbedingung
- Ableitungen im Frequenzbereich: $\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -i \mathcal{F}\{x \cdot f(x)\}(\omega)$ } ähnlich wie bei Laplace mit i.c.
- Faltung (convolutions): $\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$ } wird noch auf zu ergänzt
auch ähnlich wie bei Laplace aber mit $\sqrt{2\pi}$ -Term

Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ak^2+bk+c)} dk = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

1.MC3 [3 Points] Solve the following integral equation using the Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x-y)g(y) dy = e^{-4x^2}$$

where

$$g(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

(A) $f(x) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x} d\omega$

(B) $f(x) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \sin(\omega) e^{i\omega x} d\omega$

(C) $f(x) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \frac{1}{\sin(\omega)} e^{i\omega x} d\omega$

(D) $f(x) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \frac{\omega}{\sin(\omega)} e^{i\omega x} d\omega$

1.8 Convolution (Faltung)

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau) d\tau$$

2.9 Fourier Transform

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g)$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}$
- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2kx) dx = e^{-k^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(2kx) dx = e^{-k^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrierbar, dann ist die Fourier Transformation von f :

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die inverse Fourier Transformation von g ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

	$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
3)	$\begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}$

Auf der ersten Seite der Prüfung
hats eine ZF, welche gewiss
KT, FT und Integrale die
man verwenden kann.
→ Nicht vergessen!

Bsp. 3

Fourier (Recap)

Für periodische
Funktionen

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Fourier-Reihe

$$a_n = b_n$$

Fourier Integral

$$F(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

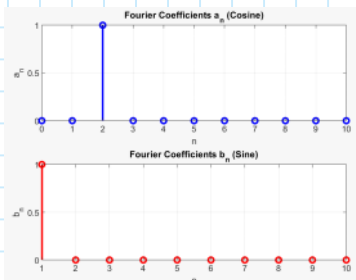
$$F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

komplexe Fourier Reihe

Fourier Transformation (Inversen)

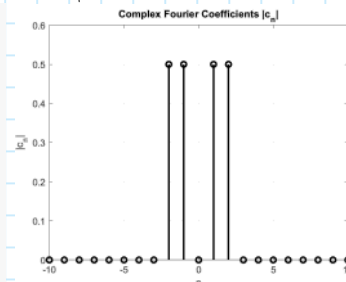
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Fourierreihe

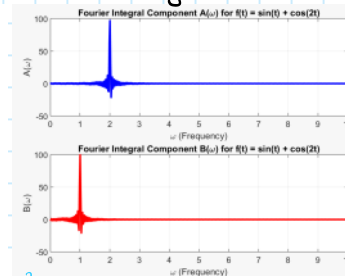


periodisch
 $\sin t + \cos 2t$

komplexe Fourier-Reihe

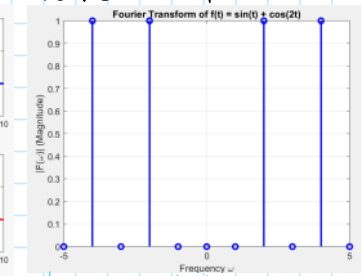


Fourier Integral



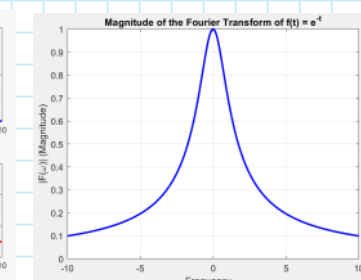
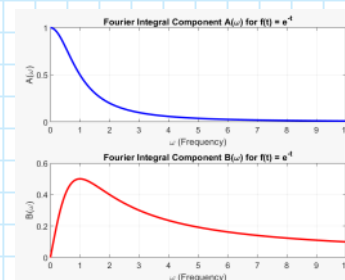
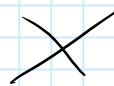
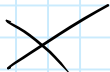
→ keine genaue Lösung numerische Approximation

Fourier Transform



→ wurde diskretisiert

nicht
periodisch
 e^{-t}



Zusammenhang Fourier Transform und Laplace Transform

Laplace Transform

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Fourier Transform

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Unterschiede: • Fourier hat ein Skalierungsterm (Normalisierungsterm)

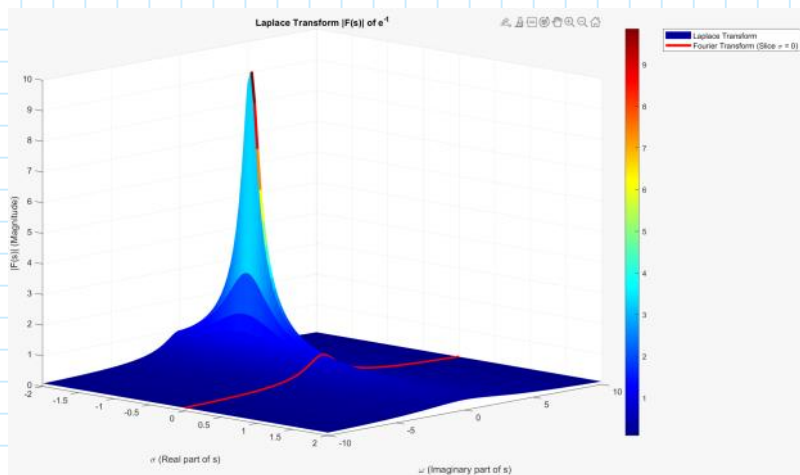
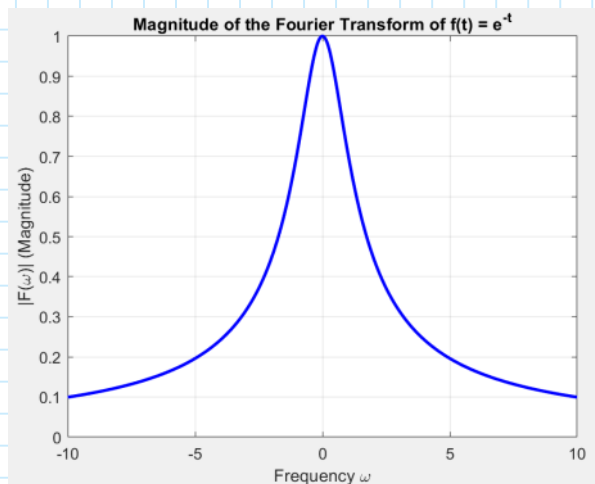
• Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt$, da wir hier $f(t < 0) = 0$ angenommen haben (→ könnte man machen)

• Fourier Transform ist ein Spezialfall vom Laplace Transform mit:

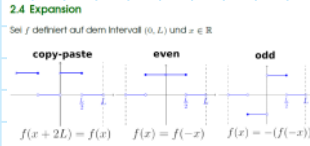
↳ Bei welcher σ gleich 0 gesetzt. Hier bei ist σ der Realteil von s
($s = \sigma + i\omega = i\omega$)

↳ Bei welcher wir mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ skalieren

→ sprich Fourier Transform ist ein 2D-Schnitt entlang der imaginären Achse von der s -Domäne und dann noch skaliert.



Tipps Serie 6



🔑 = wichtig

🔑 = hilfreich

🔑 = nicht so wichtig

1) a) Copy-paste expansion

(Recap: Fourierreihe)

b) - Gerade/ungerade Funktion?

- Bestimme die Koeffizienten a_0, a_n, b_n . Benutze die Vereinfachung durch Parität
- Musterlösung bestimmt Koeffizienten von g' und vergleicht mit Fouriierkoeffizienten von (Aufgabe 3b (Serie 6)) $\rightarrow$ bisschen random

c) - Berechne den Wert der gegebenen Summe. Welche Stelle x_0 müssen wir betrachten, um die Summe darzustellen.

- Versuche $(-1)^n$ und $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$ zu eliminieren. Hint: $(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$

2) a) - Um c_n zu berechnen, ist es einfacher cosinus hyperbolicus in der Exponentialschreibweise

(Recap: Komplexe Fourierreihe)

$$\hookrightarrow \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

- Um die Terme dann zu vereinfachen, kann man folgende Beziehungen verwenden:

$$\hookrightarrow \sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \quad \text{und} \quad e^{\pm i n \pi} = (-1)^n$$

- Ähnlich wie Bsp. 2 (Woche 5)

b) - Verändere Resultat aus 2a), so dass wir die gegebene Summe erhalten

- x_0 so auswählen, so dass wir möglichst ähnlichen Ausdruck erhalten

- x_0 so wählen, dass wir $\cosh(ax_0)$ kennen.

- Summe symmetrisch bezüglich $x \rightarrow$ so wir können es aufteilen (identisch zu Bsp. 3 (Woche 5))

3) a) - Gerade/ungerade Funktion?

(Recap: Fourierreihe)

- Bestimme die Koeffizienten a_0, a_n, b_n . Benutze die Vereinfachung durch Parität

b) Wähle x_0 , so dass die Fourierreihe eine ähnliche Form hat wie die gegebene Summe

- Sehr ähnlich wie (Bsp. 10 (Woche 4))

4) - Gerade/ungerade Funktion?

- Bestimme die Koeffizienten $A(w), B(w)$. Benutze die Vereinfachung durch Parität.

5) a) Für welche w brauchen wir eine Fallunterscheidung?

b) Nachdem das Integral ausgewertet wurde, verwende die Eulerbeziehungen, um die komplexen Exponentialfunktionen als trigonometrische Funktionen darzustellen.