Diskrete Fourier Transformation

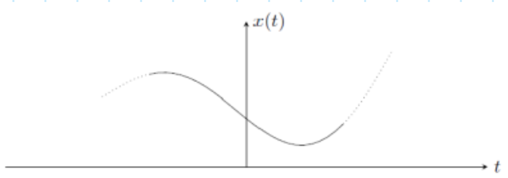
Bis jetzt haben wir immer kontinuierliche Signale bzw. Funktion in der Zeitdomäne betrachtet. Diese Woche schauen wir uns an wir unsere "Werkzeuge", insbesondere Fourier Transformation, für diskrete Signale anpassen können.

Aber wieso eigentlich diskrete Signale?

Digitale Geräte (wie Computer, Smartphones, etc) können nur diskrete Daten verarbeiten. Man hat zwar vielleicht kontinuierliche Signale aus der realen Welt, die über einen unendlich Bereich definiert sind, aber alle digitalen Geräte besitzen nur endliche Datenmengen.

Kontinuierliche Signale

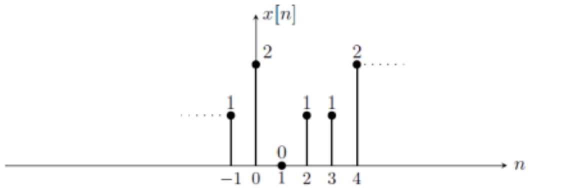
- $x(t)$: t ist kontinuierlich $t \in \mathbb{R}$
- $x(t)$ nimmt kontinuierliche Werte an



Diskrete Signale

- $x[n]$: n ist diskrete, ganze Zahle ($n \in \mathbb{Z}$)

  ↳ Notation von Signal system für diskrete Signale
- $x[n]$ kann kontinuierliche oder diskrete Werte annehmen



- Laplace Tranformation
- (Fourier Reihe) / Komplexe Fourier Reihe
- (Fourier Integral) / Fourier Transformation

- Z-Transform (erst in Signals and systems)
- Diskrete Fourier Reihe (DFS) (erst in Signals and systems)
- Diskrete Fourier Transformation (DFT)

  ↳ schauen wir uns an!

→ Im Gegensatz zur kontinuierlichen Fourier Transformation, analysiert DFT nur eine endliche Menge von Werten $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ eines Signals, dass an n Abtastzeiten ($t_j = \frac{2\pi j}{n}$ $\forall\ j = 0, 1, \dots n-1$) bestimmt wird.

Wir suchen eine Fourierreihe die das verhalten an diesen diskreten Punkten beschreibt:

Def.
$$\boxed{f(t) = c_0 + c_1 e^{2it} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)it}}$$

c_k ≙ Gewichte der Frequenzenkomponenten

Um die Koeffizienten zu berechnen, können wir die DFT Formel verwenden:

Def
$$\boxed{c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot e^{-ik \overbrace{\frac{2\pi j}{n}}^{t_j}} \quad \forall\ k = 0, 1, \dots n-1}$$

Um die Ausgangsdaten aus den transformierten Werten c_k zurückzuerhalten, verwenden wir die Inverse DFT:

Def
$$\boxed{f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot e^{ik \overbrace{\frac{2\pi j}{n}}^{t_j}} \quad \forall\ j = 0, 1, \dots n-1}$$

Wir iterieren in beiden Fällen über k und j. Wir können zwei verknüpften Summe auch als Matrix auffassen

↳ Fourier Matrix:

- Die Fourier Matrix M_n hat Dimension $n \times n$ ← Länge unseres Signal
- Jeder Eintrag ist eine Potenz der Einheitswurzel $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$
- Die Einträge der Matrix in der k-ten Zeile und j-ten Spalten ist $\omega_n^{kj} = e^{(2\pi i/n)k\cdot j}$ ↝ Die gleichen Exponentialfunktionen wie bei der DFT-Formel als alternative Representation
- Die Fourier Transformation kann man wie folgt definieren:

Def.

$$\boxed{C = M_n \cdot F \quad \text{mit} \quad F := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix};\; C := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad M_n := \begin{pmatrix} \overset{\omega_n^{kj} = \omega_n^0 = e^0 = 1}{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = (\omega_n^{kj})_{k,j=0,\dots,n-1} = (e^{(2\pi i/n)k\cdot j})_{k,j=0,\dots,n-1}}$$

- Bei der Inversen Matrix hat einfach die invertierten Einheitswurzeln. Das bedeutet dass die Einträge nun $\omega_n^{-kj} = e^{-(2\pi i/n)k\cdot j}$ sind. Die Inverse DFT können wir wie folgt beschreiben:

Def.

$$\boxed{C = M_n^{-1} \cdot F \quad \text{mit} \quad F := \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix};\; C := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \overset{\omega_n^{kj} = \omega_n^0 = e^0 = 1}{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}(\omega_n^{-kj})_{k,j=0,\dots,n-1} = \frac{1}{n}(e^{-(2\pi i/n)k\cdot j})_{k,j=0,\dots,n-1}}$$

Bsp 1.

1. Discrete Fourier transform (DFT)

Let $N = 4$ and f be a function whose the following values,

$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 0, \quad f\left(2\frac{2\pi}{N}\right) = 6, \quad f\left(3\frac{2\pi}{N}\right) = 3.$$

Find the discrete Fourier transform (DFT) of the function f with th numerical values given above. And write down the finite trigonometr representation of the function f with the coefficients that you found.

Steps:

1) Find the value of w_4.
2) Compute the entries of the matrix $\mathbf{M}_4^{-1}$ using the formula
$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{N}[w^{-jk}].$$
3) Use the formula
$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F},$$
where $\mathbf{F} = [2 \ \ 0 \ \ 6 \ \ 3]^\top$ to find $\mathbf{C} = [c_0 \ \ c_1 \ \ c_2 \ \ c_3]^\top$.
4) Use Euler's formula to pass from the finite complex Fourier series
$$f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + c_3 e^{3it}$$
to the finite trigonometric representation.

1) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = 4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \underline{i}$

2) Formel: $\boxed{M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$n = 4: M_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ 1 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ 1 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i^{-1} & i^{-2} & i^{-3} \\ 1 & i^{-2} & i^{-4} & i^{-6} \\ 1 & i^{-3} & i^{-6} & i^{-9} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}}}$$

3) Formel: $\boxed{C = M^{-1} F}$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 \\ -4+3i \\ 5 \\ -4-3i \end{pmatrix}}}$$

4) Formel $\boxed{f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + e^{3it}}$ Formel: $\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$

$$f(t) = \frac{1}{4}\Big(11 + (-4+3i)(\cos(t)) + i\sin(t)) + 5(\cos(2t) + i\sin(2t)) + (-4-3i)(\cos(3t) + i\sin(3t)\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(11 + (-4\cos(t) - 4i\sin(t) + 3i\cos(t) - 3\sin(t)) + 5\cos(2t) + 5i\sin(2t) + (-4\cos(3t) + 3\sin(3t) - 3i\cos(3t) - 4i\sin(3t))\Big)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\big(11 - 4\cos(t) - 3\sin(t) + 5\cos(2t) - 4\cos(3t) + 3\sin(3t)\big) + \frac{i}{4}\big(-4\sin(t) + 3\cos(t) + 5\sin(2t) - 3\cos(3t) - 4\sin(3t)\big)}}$$

Bsp. 2

2. Write out the matrix $\mathbf{M}_8$ in terms of w_8, expressing each entry as the lowest possible positive power of w_8. You do not need to write w_8 explicitly.

Do the same for the inverse matrix $\mathbf{M}_8^{-1}$.

Formel:

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \qquad M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$$

Tipp zur Vereinfachung: $\omega_8^8 = ?$

$\Rightarrow n = 8$:

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&\omega_8^1&\omega_8^2&\omega_8^3&\omega_8^4&\omega_8^5&\omega_8^6&\omega_8^7 \\ 1&\omega_8^2&\omega_8^4&\omega_8^6&\omega_8^8&\omega_8^{10}&\omega_8^{12}&\omega_8^{14} \\ 1&\omega_8^3&\omega_8^6&\omega_8^9&\omega_8^{12}&\omega_8^{15}&\omega_8^{18}&\omega_8^{21} \\ 1&\omega_8^4&\omega_8^8&\omega_8^{12}&\omega_8^{16}&\omega_8^{20}&\omega_8^{24}&\omega_8^{28} \\ 1&\omega_8^5&\omega_8^{10}&\omega_8^{15}&\omega_8^{20}&\omega_8^{25}&\omega_8^{30}&\omega_8^{35} \\ 1&\omega_8^6&\omega_8^{12}&\omega_8^{18}&\omega_8^{24}&\omega_8^{30}&\omega_8^{36}&\omega_8^{42} \\ 1&\omega_8^7&\omega_8^{14}&\omega_8^{21}&\omega_8^{28}&\omega_8^{35}&\omega_8^{42}&\omega_8^{49} \end{bmatrix}$$

$\omega_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}} \qquad \omega_8^8 = \left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)^8 = 1$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&\omega_8&\omega_8^2&\omega_8^3&\omega_8^4&\omega_8^5&\omega_8^6&\omega_8^7 \\ 1&\omega_8^2&\omega_8^4&\omega_8^6&1&\omega_8^2&\omega_8^4&\omega_8^6 \\ 1&\omega_8^3&\omega_8^6&\omega_8&\omega_8^4&\omega_8^7&\omega_8^2&\omega_8^5 \\ 1&\omega_8^4&1&\omega_8^4&1&\omega_8^4&1&\omega_8^4 \\ 1&\omega_8^5&\omega_8^2&\omega_8^7&\omega_8^4&\omega_8&\omega_8^6&\omega_8^3 \\ 1&\omega_8^6&\omega_8^4&\omega_8^2&1&\omega_8^6&\omega_8^4&\omega_8^2 \\ 1&\omega_8^7&\omega_8^6&\omega_8^5&\omega_8^4&\omega_8^3&\omega_8^2&\omega_8 \end{bmatrix}$$

$$M_8^{-1} = \frac{1}{8} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&\omega_8^{-1}&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-3}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-5}&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-7} \\ 1&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-6}&1&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-6} \\ 1&\omega_8^{-3}&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-1}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-7}&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-5} \\ 1&\omega_8^{-4}&1&\omega_8^{-4}&1&\omega_8^{-4}&1&\omega_8^{-4} \\ 1&\omega_8^{-5}&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-7}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-1}&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-3} \\ 1&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-2}&1&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-2} \\ 1&\omega_8^{-7}&\omega_8^{-6}&\omega_8^{-5}&\omega_8^{-4}&\omega_8^{-3}&\omega_8^{-2}&\omega_8^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&\omega_8^7&\omega_8^6&\omega_8^5&\omega_8^4&\omega_8^3&\omega_8^2&\omega_8 \\ 1&\omega_8^6&\omega_8^4&\omega_8^2&1&\omega_8^6&\omega_8^4&\omega_8^2 \\ 1&\omega_8^5&\omega_8^2&\omega_8^7&\omega_8^4&\omega_8&\omega_8^6&\omega_8^3 \\ 1&\omega_8^4&1&\omega_8^4&1&\omega_8^4&1&\omega_8^4 \\ 1&\omega_8^3&\omega_8^6&\omega_8&\omega_8^4&\omega_8^7&\omega_8^2&\omega_8^5 \\ 1&\omega_8^2&\omega_8^4&\omega_8^6&1&\omega_8^2&\omega_8^4&\omega_8^6 \\ 1&\omega_8&\omega_8^2&\omega_8^3&\omega_8^4&\omega_8^5&\omega_8^6&\omega_8^7 \end{bmatrix}$$

Fast Fourier Transformation (FFT)

Die Fast Fourier Transformation ist ein Algorithmus zur Berechnung der diskreten Fourier Transformation. Anstatt DFT direkt zu berechnen wir eine rekursive Methode, welche die Anzahl der Operationen von $O(n^2)$ auf $O(\log(n)\cdot n)$ reduziert.

Die DFT braucht n^2 komplexe Multiplikation und Additionen bei einer Eigangssequenz von der Länge n. Die FFT nutzt die Struktur der Fourier-Matrix, um das Problem in kleinere Teile aufzuteilen.

Für eine Eigangsfolge mit geraden und ungeraden Indizes wird die DFT in zwei Summen aufgeteilt.

Def.

$$\boxed{c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cdot e^{-2\pi i kj/n} = \sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j}\, e^{-2\pi i k 2j/n} + \sum_{j=0}^{n/2-1} f_{2j+1}\, e^{-2\pi i k(2j+1)/n}}$$

$\leadsto$ n muss eine Zweierpotenz sein

Da nun jede dieser kleineren Summen auch eine DFT ist, können wir rekursiv das gleiche Verfahren mit der Länge 2 erreichen, welche eine geschlossene Lösung (Multiplikation mit 1 bzw (-1)) erreichen. $\leadsto$ (Divide and Conquer)

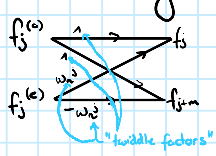
Das gleiche kann wir die Inverse DFT machen, welche in der Vorlesung genauer betrachtet worden ist:

Def.

$$f_j = \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k}\,\omega_m^{jk}}^{f_j^{(o)}} + \omega_n^j \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k+1}\,\omega_m^{jk}}^{f_j^{(e)}} = f_j^{(o)} + \omega_n^j f_j^{(e)} \qquad \text{mit } m := \frac{n}{2}$$

$$f_{j+m} = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k}\,\omega_m^{jk}}_{f_j^{(o)}} - \omega_n^j \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} c_{2k+1}\,\omega_m^{jk}}_{f_j^{(e)}} = f_j^{(o)} - \omega_n^j f_j^{(o)} \qquad \forall j = 0, \dots, m-1$$

Graphische Darstellung (Butterfly pattern)



Wir können hier auch wieder die Matrixnotation einführen

$\leadsto$ ähnliche Formeln kann auch für c aufstellen
$\leadsto$ seht ihr bei Bsp. 3/5

Def.

$$F = M_n C \quad \text{mit } F := \begin{pmatrix} F^{(o)} \\ F^{(e)} \end{pmatrix} \quad F^{(o)} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^{(o)} \\ f_1^{(o)} \\ \vdots \\ f_{m-1}^{(o)} \end{pmatrix} \quad F^{(e)} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^{(e)} \\ f_1^{(e)} \\ \vdots \\ f_{m-1}^{(e)} \end{pmatrix}$$

$$M_n := \begin{pmatrix} M_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} F^{(o)} \\ F^{(e)} \end{pmatrix} \quad C^{(o)} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \\ \vdots \\ c_{m-1}^{(o)} \end{pmatrix} \quad C^{(e)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \\ \vdots \\ c_{m-1}^{(e)} \end{pmatrix} \quad m := n/2$$

3. Fast Fourier Transform (FFT)

Compute the Fast Fourier Transform (FFT) of the same function given in exercise 1. Check that you get the same result.

Steps:

1) Find the value of w_M, where $M = \frac{N}{2}$.
2) Compute the even and odd coefficients $\mathbf{C}^{(o)}$ and $\mathbf{C}^{(e)}$ using the formula

$$\mathbf{C}^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{f}^{(o)}, \qquad \text{and} \qquad \mathbf{C}^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{f}^{(e)}$$

3) Find the value of w_N.
4) Compute the coefficient c_k using the formulas for $k < M$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + w_N^{-k} c_k^{(e)}\right).$$

And for the coefficient c_k with $k \geq M$,

$$c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - w_N^{-k} c_k^{(e)}\right).$$

1) Formel: $\boxed{w_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = M = \frac{N}{2} = 2: \quad w_2 = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = \underline{\underline{-1}}$

2) Formel: $\boxed{C^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(o)}}$ $\boxed{C^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(e)}}$

Formel: $\boxed{M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n^{-1} & w_n^{-2} & \cdots & w_n^{-(n-1)} \\ 1 & w_n^{-2} & w_n^{-4} & \cdots & w_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{-(n-1)} & w_n^{-2(n-1)} & \cdots & w_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w_2^{-(1)\cdot(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w_2^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{(o)} = M_2^{-1} f^{(o)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{pmatrix}}}$$

Bsp.3.

$$C^{(e)} = M_2^{-1} f^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{pmatrix}}}$$

3) Formel: $\boxed{w_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = N = 4: \quad w_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2} i} = \underline{\underline{i}}$

4) Formel: $\boxed{c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + w_N^{-k} c_k^{(e)}\right)}$ $\boxed{c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - w_N^{-k} c_k^{(e)}\right) \quad \forall k > M \; (M = \tfrac{N}{2})}$

Aus Aufgabe 1) $F = [2, 0, 6, 3]$

$c_0 = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} + w_4^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) + 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = \frac{1}{4}(11)$ ✓

$c_1 = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} + w_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) + (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 i - f_2 + f_3 i) = \frac{1}{4}(-4 + 3i)$ ✓

$k \geq M = \frac{N}{2} = 2$

$c_2 = c_{2+0} = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} - w_4^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) - 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 + f_2 - f_3) = \frac{1}{4}(5)$ ✓

$c_3 = c_{2+1} = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} - w_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) - (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 i - f_2 - f_3 i) = \frac{1}{4}(-4 - 3i)$ ✓

4. Let $\mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^\top$.

- Find $\mathbf{F}$ using $\mathbf{F} = \mathbf{M}_4\mathbf{C}$.
- Find $\mathbf{F}$ using the fast Fourier transform.

Bsp. 4

1.1) ω_n und n bestimmen

Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n=4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

1.2) Fourier Matrix M_4 bestimmen

Formel: $\boxed{M_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$n=4: M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_4 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ 1 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ 1 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

1.3) F bestimmen

Formel $\boxed{F = M_n \cdot C}$

$$n=4: \; F = M_4 C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

2.1) $\omega_{N/2} = \omega_M$ bestimmen:

Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$ $\quad n = M = \frac{N}{2} = 2: \quad \omega_2 = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$

2.2) $F^{(0)}$ und $F^{(1)}$ bestimmen

Formel: $\boxed{F^{(0)} = \begin{bmatrix} f_0^{(0)} \\ f_1^{(0)} \end{bmatrix} = M_2 c^{(0)}}$ $\quad \boxed{F^{(1)} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} \\ f_1^{(1)} \end{bmatrix} = M_2 c^{(1)}}$ $\quad \boxed{M_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{(1)\cdot(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F^{(0)} = M_2 c^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} c_0 + c_2 \\ c_0 - c_2 \end{pmatrix}}}$$

$$F^{(1)} = M_2 c^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ c_1 - c_3 \end{pmatrix}}}$$

2.3) ω_n bestimmen

Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$ $\quad n = N = 4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \underline{\underline{i}}$

2.4) f_k bestimmen

Formel: $\boxed{f_k = f_k^{(0)} + \omega_n^k f_k^{(1)}}$ $\quad \boxed{f_{k+M} = f_k^{(0)} - \omega_n^k f_k^{(1)} \quad \forall k \geq M \; (M = \tfrac{N}{2})}$

$f_0 = f_0^{(0)} + \omega_4^0 f_0^{(1)} = (c_0 + c_2) + 1 \cdot (c_1 + c_3) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = \underline{\underline{3}}$ ✓

$f_1 = f_1^{(0)} + \omega_4^1 f_1^{(1)} = (c_0 - c_2) + (i) \cdot (c_1 - c_3) = (c_0 + c_1 i - c_2 - c_3 i) = \underline{\underline{1}}$ ✓

$k \geq M = \frac{N}{2} = 2$

$f_2 = f_{2+0} = f_0^{(0)} - \omega_4^0 f_0^{(1)} = (c_0 + c_2) - 1 \cdot (c_1 + c_3) = (c_0 - c_1 + c_2 - c_3) = \underline{\underline{-1}}$ ✓

$f_3 = f_{2+1} = f_1^{(0)} - \omega_4^1 f_1^{(1)} = (c_0 - c_2) - (i)(c_1 - c_3) = (c_0 - c_1 i - c_2 + c_3 i) = \underline{\underline{1}}$ ✓

5. Fast Fourier Transform (FFT)

Let $N = 4$ and f be a function whose the following values,

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{2\pi}{N}\right) = 1, \quad f\left(2\frac{2\pi}{N}\right) = 2, \quad f\left(3\frac{2\pi}{N}\right) = 3.$$

Compute the Fast Fourier Transform (FFT) of the function f with the numerical values given above. And write down the finite trigonometric representation of the function f with the coefficients that you found.

1) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

$n = M = \frac{N}{2} = 2: \quad \omega_2 = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = \underline{\underline{-1}}$

2) Formel: $\boxed{c^{(o)} = \begin{bmatrix} c_0^{(o)} \\ c_1^{(o)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(o)}}$ $\boxed{c^{(e)} = \begin{bmatrix} c_0^{(e)} \\ c_1^{(e)} \end{bmatrix} = M_2^{-1} f^{(e)}}$

Formel: $\boxed{M_n^{-1} := \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}}$

$$M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{-(1)\cdot(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega_2^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c^{(o)} = M_2^{-1} f^{(o)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_0 + f_2 \\ f_0 - f_2 \end{pmatrix}}}$$

$$c^{(e)} = M_2^{-1} f^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1 + f_3 \\ f_1 - f_3 \end{pmatrix}}}$$

3) Formel: $\boxed{\omega_n = e^{2\pi i/n}}$

Bsp.5

$n = N = 4: \quad \omega_4 = e^{2\pi i/4} = e^{\frac{\pi}{2} i} = \underline{\underline{i}}$

4) Formel: $\boxed{c_k = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} + \omega_N^{-k} c_k^{(e)}\right)}$ $\boxed{c_{k+M} = \frac{1}{2}\left(c_k^{(o)} - \omega_N^{-k} c_k^{(e)}\right) \quad \forall k > M \ (M = \tfrac{N}{2})}$

Neues $F = [0, 1, 2, 3]$

$c_0 = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} + \omega_4^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) + 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) = \frac{1}{4}(6) = \frac{3}{2}$

$c_1 = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} + \omega_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) + (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 i - f_2 + f_3 i) = \frac{1}{4}(-2 + 2i) = \frac{-1+i}{2}$

$k \geq M = \frac{N}{2} = 2$

$c_2 = c_{2+0} = \frac{1}{2}\left(c_0^{(o)} - \omega_4^0 c_0^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_2) - 1 \cdot \frac{1}{2}(f_1 + f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 - f_1 + f_2 - f_3) = \frac{1}{4}(-2) = -\frac{1}{2}$

$c_3 = c_{2+1} = \frac{1}{2}\left(c_1^{(o)} - \omega_4^{-1} c_1^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_0 - f_2) - (-i) \cdot \frac{1}{2}(f_1 - f_3)\right) = \frac{1}{4}(f_0 + f_1 i - f_2 - f_3 i) = \frac{1}{4}(-2 - 2i) = \frac{-1-i}{2}$

5) Formel $\boxed{f(t) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + e^{3it}}$ Formel: $\boxed{e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)}$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(3 + (-1 + i)\,(\cos(t) + i\sin(t)) - 1\,(\cos(2t) + i\sin(2t)) + (-1 - i)\,(\cos(3t) + i\sin(3t))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \cos(t) - \sin(t) + \cos(t) i - \sin(t) i - \cos(2t) - i\sin(2t) - \cos(3t) + \sin(3t) - \cos(3t) i - \sin(3t) i\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(3 - \cos(t) - \sin(t) - \cos(2t) - \cos(3t) + \sin(3t) + i\left(\cos(t) - \sin(t) - \sin(2t) - \cos(3t) - \sin(3t)\right)\right)}}$$

Tipps Serie 7

$\equiv$ = wichtig
$\equiv$ = hilfreich
$\equiv$ = nicht so wichtig

1) • Folge dem Schema aus der Aufgabenstellung. Die notwendigen Formeln sind in den leeren Notizen
2) • Verwende die Formeln von den leeren Notizen
   • Tipp: Imaginärer Einheitskreis ($\omega_8^8 = ?$)
3) • Folge dem Schema aus der Aufgabenstellung. Die notwendigen Formeln sind in den leeren Notizen
4) • Inverse DTF:
   • Folge dem Schema aus der Aufgabenstellung 1, aber die Formeln sind nicht gleich $\rightsquigarrow$ sind auch in den leeren Notizen
   • Inverse FFT:
   • Folge dem Schema aus der Aufgabenstellung 3, aber die Formeln sind nicht gleich $\rightsquigarrow$ sind auch in den leeren Notizen
5) • Genau gleich wie Aufgabe 3) aber ein anderes F
   • Verwende Euler'sche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

5