

# Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung beschreibt wie die Ableitungen einer unbekannten Funktion sich ändern und wie die Korrelation zu anderen Funktionen und anderen Parametern aussiehen. Diese Gleichungen werden normalerweise von der Physik des beobachteten Systems hergeleitet mit dem Ziel die unbekannte Funktion zu bestimmen.

In Analysis I haben wir gewöhnliche DGL's (ODE's) behandelt. Bei einer ODE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von einer Variablen (bspw.  $y(x)$ )  
 und gibt Information zu einer oder mehreren Ableitungen (bspw.  $\frac{dy}{dx}(x)$ ) möglichstweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von dieser Variablen.  
 $y(x) = f(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), g(x))$

In Analysis II schauen wir uns partielle DGL's (PDE's) an. Bei einer PDE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von mehreren Variablen (bspw.  $u(x,y)$ ).  
 Folglich beschreibt die PDE das Verhalten einer oder mehreren partiellen Ableitungen (bspw.  $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ ) möglichstweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von diesen Variablen.  
 $u(x,y) = f(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,y), g(x,y))$

## Notation

$$u = u(x_1, \dots, x_n); u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (partielle Ableitung nach } x_1\text{)}; u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ (partielle Ableitung zweiter Ordnung nach } x_1\text{)}; u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - u_t = \dot{u}$$

## Eigenschaften

Eine PDE ist...

↪ linear, falls die gesuchte Funktion und die Ableitungen nur linear in der Gleichung vorkommen

Sind diese PDE's linear oder nicht linear?

$$u_x + 2u_y + u = x \Rightarrow$$

$$u_x = \cos(x) \cdot u \Rightarrow$$

Bsp. 1.

$$u_x = \cos(u) \Rightarrow$$

$$u_x^2 = u \Rightarrow$$

$$u_x + 3u_x \cdot u_y = 0 \Rightarrow$$

↪ homogen, falls die Gleichung nur die gesuchte Funktion oder einer der partiellen Ableitungen besitzt und linear ist

Sind diese PDE's homogen oder nicht?

Bsp. 2

$$u_x + u_y = 2u \Rightarrow$$

$$u_x + u_y = 2x \Rightarrow$$

↪ n-te-Ordnung, wobei n die höchste Ableitung der unbekannten Funktion darstellt.

Bestimme die Ordnung der PDE's?

Bsp. 3

$$u_{xy} + u_x = u \Rightarrow$$

$$u_x + u_y = u \Rightarrow$$

## Klassifizierung von linearen PDE's 2. Ordnung

Betrachten wir eine lineare PDE zweiter Ordnung von einer Funktion  $u(x,y)$  in der folgenden Form:

$$A \cdot u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x,y, u, u_x, u_y)$$

→ hyperbolisch:  $AC - B^2 < 0$



→ parabolisch:  $AC - B^2 = 0$



→ elliptisch:  $AC - B^2 > 0$



→ mixed type: Da A,B,C Funktionen von den Variablen  $(x,y)$  sein können, kann sich der Typ des PDEs je nach den Werten  $(x,y)$  möglicherweise andern. In diesem Fall ist die PDE mixed type und wir sollten die Klassifizierung für verschiedene Werte / Regionen von  $(x,y)$  machen.

Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE:  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + xu = 0$

$$A \cdot u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x,y, u, u_x, u_y)$$

Bsp. 4

Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE:  $yu_{xx} + 2x^3u_{xy} + u_{yy} = u_x + u_y + u$

$$A \cdot u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x,y, u, u_x, u_y)$$

Bsp. 5

## Wichtige PDE's

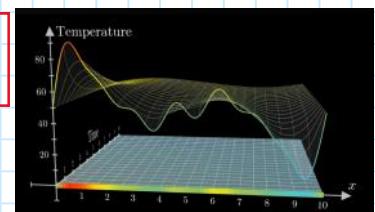
→ wir schauen noch weitere wichtige PDE's in den nächsten Wochen an

### 1D Heat Equation / 1D Wärmeleitungsgleichung

Def.  $u_t = C^2 \cdot u_{xx}$ , mit  $u(t,x)$ , welche die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  beschreibt.

C = Konstante  $\Rightarrow$  Wärmeleitfähigkeit

- parabolische PDE

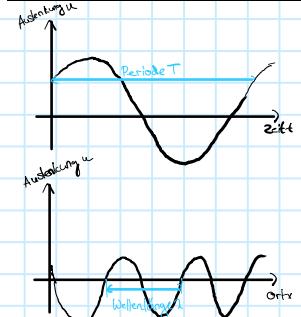


### 1D Wave Equation / 1D Wellengleichung

Def.  $u_{tt} = C^2 \cdot u_{xx}$ , mit  $u(t,x)$ , welche die Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  beschreibt.

C = Konstante  $\Rightarrow$  Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

- hyperbolische PDE



## Lösen von PDE's

- Fourier Transformation
  - Separation der Variablen  $\xrightarrow{\text{aus}} u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$
  - Lösen mit Integrieren und Substitution  
↳ nur möglich wenn Ableitung bezüglich einer Variablen vorkommt  $\xrightarrow{\text{!}} \text{solchen}$
- In den nächsten Wörtern für allgemeine bzw. komplexere PDEs als diese Woche

$$\begin{cases} u_{yy} = u_y \cdot \frac{1}{Y} \\ u(x,0) = G(0) \\ u(x,1) = \cos(x) \end{cases} \quad \text{Bestimme } u = u(x,y).$$

Bsp. 6

## Fourier Transform (Recap)

### Prüfungsaufgabe Winter 2023

1.MC3 [3 Points] Let  $f$  be a continuous function such that  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\pi x^2}.$$

- (A)  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega - 4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x} d\omega.$   
 (B)  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega + 4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x} d\omega.$   
 (C)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega - 4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x} d\omega.$   
 (D)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega + 4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x} d\omega.$

Bsp. 7

### 2.9 Fourier Transformation

Sei  $f$  absolut integrierbar, dann ist die Fourier Transformation von  $f$ :

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

$$\mathcal{F}(f'(x)) = i\omega \mathcal{F}(f(x))$$

$$\mathcal{F}(f''(x)) = -\omega^2 \mathcal{F}(f(x))$$

$$\mathcal{F}(x^2 f(x)) = -\mathcal{F}'(f(x))$$

### 2.10 Inverse Fourier Transformation

Die Inverse Fourier Transformation von  $g$  ist:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{ix\omega} d\omega$$

### 2.9.1 Nützliche Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-i\omega x} dx = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = e^{\frac{-b^2}{4a}-c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

### Prüfungsaufgabe Winter 2020

3.c) Let  $f(x)$  be a function with Fourier transform equal to  $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$ . Bestimme  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

# Tipps Serie 7

$\text{W}$  = wichtig  
 $\text{N}$  = hilfreich

$\text{N}$  = nicht so wichtig

## 1) 3.2 Lineare PDE 2. Ordnung

Eine lineare PDE 2. Ordnung kann man in die Form

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Eine lineare PDE 2. Ordnung heißt

- hyperbolisch, falls  $AC - B^2 < 0$
- parabolisch, falls  $AC - B^2 = 0$
- elliptisch, falls  $AC - B^2 > 0$
- mixed type, falls je nach  $x$  oder  $y$  anders

- Schreibe die PDE in die Form:  $A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$
- Bestimme mit "Koeffizientenvergleich"  $A, B$  und  $C$
- Bestimme  $AC - B^2 \rightarrow$  hyperbolisch, elliptisch, parabolisch oder mixed type
- Bei mixed type  $\rightarrow$  Fallunterscheidung nicht vergessen

## 2) Bestimme die partiellen Ableitungen $u_t, u_{xx}$ und $u_{yy}$ in Abhängigkeit von $u$ (falls möglich)

- Gilt  $u_t = C^2 \cdot u_{xx}$  (Wärmeleitungsgleichung)?

- Oder gilt  $u_t = C^2 \cdot u_{yy}$  (Wellengleichung)?

- Bestimme die Konstante  $C$ .

## 3) a) Separation der Variablen

- Achtung:  $u(x, y) \sim$  auch von  $x$  abhängig  $\rightarrow$  was bedeutet das für die Konstante

## b) Substitution: $v := u_y$

### Separation der Variablen

- Achtung:  $u(x, y) \sim$  auch von  $x$  abhängig  $\rightarrow$  was bedeutet das für die Konstante

- Achtung:  $u(x, y) \sim$  auch von  $x$  abhängig  $\rightarrow$  was bedeutet das für die Konstante

## 4) Für welche $w$ brauchen wir eine Fallunterscheidung bzw. was müssen wir laut Aufgabenstellung überhaupt berechnen?

Formel:

### 2.9 Fourier Transformation

Sei  $f$  absolut integrierbar, dann ist die Fourier Transformation von  $f$ :

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

Tipps: Euler-Beziehungen (Ch. 8.9 (S.13)), davon meist benötigten Formeln finden Sie hier:

$$\begin{aligned} e^{\pm ix} &= \cos(x) \pm i \cdot \sin(x) \\ e^{ix} &= -1 \\ e^{\mp ix} &= -1^n \end{aligned}$$

## 5) a) Für welches $w$ ist Fourier-Integral $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iwx} dx = a \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx$

- $x \cdot e^{-ax^2}$  gerade/ungerade?  $\rightarrow$  was bedeutet das für symmetrische Integralgrenzen

## c) Benütze die folgende Eigenschaft $\mathcal{F}(x^2 f(x)) = -\mathcal{F}''(f(x))$ um $\mathcal{F}(x^2 e^{-ax^2})$ zu bestimmen

- Gleichtes Vorgehen wie bei a)