Partielle Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung beschreibt wie die Ableitungen einer unbekannten Funktion sich ändern und wie die Korrelation zu anderen Funktionen und anderen Parametern aussehen. Diese Gleichungen werden normalerweise von der Physik des beobachteten System hergeleitet mit dem Ziel die unbekannte Funktion zu bestimmen.

In Analysis I haben wir gewöhnliche DGL's (ODE's) behandelt. Bei einer ODE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von einer Variabel (bspw. $y(x)$)
(ordinary differential equations)
und gibt Information zu einer oder mehreren Ableitungen (bspw. $\frac{d^n}{dx^n}y(x)$) möglicherweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von dieser Variabel. $\rightsquigarrow$ bspw. $y(x) = f(y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), g(x))$
müssen hier auch nicht unbedingt konstante Koeffiziente sein.
gegebene Funktion

In Analysis II schauen wir uns partielle DGL's (PDE's) an. Bei einer PDE ist die (gesuchte) Funktion abhängig von mehreren Variabel (bspw. $u(x,y)$)
(partial differential equations)
Folglich beschreibt die PDE das Verhalten einer oder mehreren partiellen Ableitungen (bspw. $\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,y)$; $\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x,y)$) möglicherweise in Bezug zu anderen gegebenen Funktion oder weiteren Parametern abhängig von diesen Variabeln. $\rightsquigarrow$ bspw. $u(x,y) = f\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial^n x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n u(x,y)}{\partial^n y}, g(x,y)\right)$
müssen hier auch nicht unbedingt konstante Koeffiziente sein.
gegebene Funktion

Notation

$u \overset{\text{bspw.}}{=} u(x, \dots, t)$; $u_x = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \overset{\wedge}{=} u'$; $u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \overset{\wedge}{=} u''$, $u_t = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = u_t \overset{\wedge}{=} \dot{u}$

nur beispielhaft können auch andere Variabeln sein

für eine Ortvariabel

normalerweise für eine Ortvariabel

normalerweise für Zeitvariabel

Eigenschaften

Eine PDE ist...

↳ linear, falls die gesuchte Funktion und die Ableitungen nur linear in der Gleichung vorkommen

Bsp 1.

Sind diese PDE's linear oder nicht linear?

$u_x + 2u_y + u = x$ $\Rightarrow$ linear

$u_x = \cos(x) \cdot u$ $\Rightarrow$ linear

$u_x = \cos(u)$ $\Rightarrow$ nicht linear

$u_x^2 = u$ $\Rightarrow$ nicht linear

$u_x + 3u_x \cdot u_y = 0$ $\Rightarrow$ nicht linear

↳ homogen, falls die Gleichung nur die gesuchte Funktion oder einer der partiellen Ableitungen besitzt und linear ist

Bsp. 2

Sind diese PDE's homogen oder nicht?

$u_x + u_y = 2u$ $\Rightarrow$ homogen

$u_x + u_y = 2x$ $\Rightarrow$ nicht homogen

↳ n.te-Ordnung, wobei n die höchste Ableitung der unbekannte Funktion darstellt.

Bsp. 3

Bestimme die Ordnung der PDE's?

$u_{xy} + u_x = u$ $\Rightarrow$ 2. Ordnung

$u_x + u_y = u$ $\Rightarrow$ 1. Ordnung

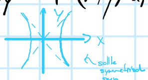
Klassifizierung von linearen PDE's 2. Ordnung

Def.

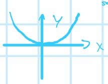
Betrachten wir eine lineare PDE zweiter Ordnung von einer Funktion $u(x,y)$ in der folgenden Form:

$$A\, u_{xx} + 2\cdot B\cdot u_{xy} + C\cdot u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

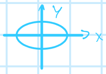
→ hyperbolisch: $AC - B^2 < 0$



→ parabolisch: $AC - B^2 = 0$



→ elliptisch: $AC - B^2 > 0$



→ mixed type: Da A,B,C Funktionen von den Variabeln (x,y) sein können, kann sich der Typ der PDE sich je nach den Werten (x,y) möglicherweise ändern. In diesem Fall ist die PDE mixed type und wir sollten die Klassifizierung für verschiedene Werte / Regionen von (x,y) machen.

Bsp. 4

Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE: $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + xu = 0$

$$A\, u_{xx} + 2\cdot B\cdot u_{xy} + C\cdot u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

$A = 1 \qquad B = 1 \qquad C = 1 \qquad A\cdot C - B^2 = 1\cdot 1 - 1^2 = 0 \Rightarrow$ parabolisch

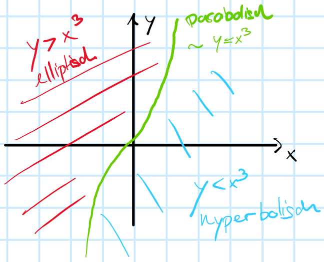
Bsp. 5

Bestimme die Klassifizierung der folgende PDE: $y u_{xx} + 2x^{3/2} u_{xy} + u_{yy} = u_x + u_y + u$

$$A\, u_{xx} + 2\cdot B\cdot u_{xy} + C\cdot u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

$A = y \qquad B = x^{3/2} \qquad C = 1 \qquad A\cdot C - B^2 = y - x^3 \Rightarrow$ mixed type

$y - x^3 = 0$



Wichtige PDE's

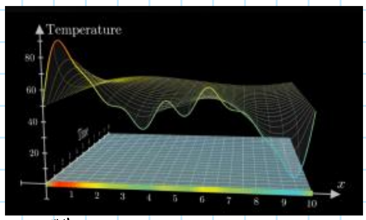
↪ wir schauen noch weitere wichtige PDE's in den nächsten Wochen an

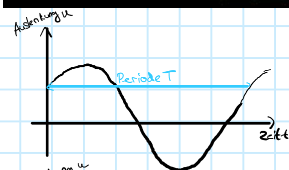
1D Heat Equation / 1D Wärmeleitungsgleichung

Def. $u_t = c^2 \cdot u_{xx}$, mit $u(t,x)$, welche die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t beschreibt.

c: Konstante ⇒ Wärmeleitfähigkeit

- parabolische PDE



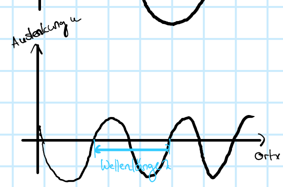


1D Wave Equation / 1D Wellengleichung

Def. $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, mit $u(t,x)$, welche die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t beschreibt.

c: Konstante ⇒ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

- hyperbolische PDE



Lösen von PDE's

- Fourier Transformation
- Separation der Variabeln $\rightsquigarrow$ bzgl. $u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$
- Lösen mit Integrieren und Substitution

  ↳ nur möglich wenn Ableitung bezüglich einer Variabel vorkommen !

} In den nächsten Wochen für allgemeinere bzw. komplexere PDE's als diese Woche

} schauen

Bsp.6

$$\begin{cases} u_{yy} = u_y \cdot \frac{1}{y} \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = \cos(x) \end{cases}$$

Bestimme $u := u(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{1}{y}$$

Substitution: $\frac{\partial u}{\partial y} := f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = f\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{f}\,\partial f = \frac{1}{y}\,\partial y \quad |\int$

$$\ln(f) = \ln(y) + C_1(x) = \ln(y\cdot C_1'(x)) \Rightarrow f = y\cdot C_1(x)$$

Rücksubstitution: $\frac{\partial u}{\partial y} = y\cdot C_1'(x) \Rightarrow \partial u = y\cdot C_1'(x)\,\partial y \overset{\int}{\Rightarrow} u(x,y) = \frac{1}{2}y^2 C_1'(x) + C_2(x)$

Randbedingung: $u(x,0) = C_2(x) = 0$

$$u(x,1) = C_1'(x)\cdot\frac{1}{2} = \cos(x) \Rightarrow C_1'(x) = 2\cos(x)$$

$$\hookrightarrow u(x,y) = \underline{\underline{\cos(x)\cdot y^2}}$$

Fourier Transform (Recap)

Prüfungsaufgabe Winter 2023

Bsp.7

1.MC3 [3 Points] Let f be a continuous function such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Solve the following differential equation using the Fourier transform

$$f(x) + f'(x) + 4f''(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\pi x^2}.$$

(A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

(B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(C) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{i\omega x}\, d\omega.$

(D) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+i\omega+4\omega^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}} e^{-i\omega x}\, d\omega.$

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\boxed{\hat f(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt}$$

x/t je nach Aufgabe

$$\mathfrak{F}(f'(x)) = i\omega\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(f''(x)) = -\omega^2\mathfrak{F}(f(x))$$
$$\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$$

2.10 Inverse Fourier Transformation

Die **inverse** Fourier Transformation von g ist:

$$\boxed{\mathfrak{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega}$$

2.9.1 Nützliche Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ikx}dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)}dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$F\{f(x) + f'(x) + 4f''(x)\} = \hat f(\omega) + i\omega\hat f(\omega) - 4\omega^2\hat f(\omega) = \hat f(\omega)(1+i\omega-4\omega^2) = F\{\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\pi x^2}\} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\cancel{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i\omega x}\,dx \overset{a=\pi}{=} e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\pi}}$$

$$\hat f(\omega) = \frac{1}{1+i\omega-4\omega^2}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\underbrace{\mathfrak{F}(f(x))(\omega)}_{\hat f(\omega)}\} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\omega-4\omega^2}e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}e^{i\omega x}\,d\omega}} \quad (C)$$

Prüfungsaufgabe Winter 2020

3.c) Let $f(x)$ be a function with Fourier transform equal to $\hat f(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$. Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

$$\hat f(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

Wir wählen x, so dass das Integral möglichst dem gegebenen Integral ähnelt $\Rightarrow \omega = 0$

$$\hat f(0) = \sqrt{\frac{2}{\cancel{\pi}}}\frac{1}{1+0} = \frac{1}{\sqrt{2\cancel{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{2}}$$

Tipps Serie 7

= wichtig

= hilfreich

= nicht so wichtig

1)

3.2 Lineare PDE 2.Ordnung

Eine lineare PDE 2.Ordnung kann man in die Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Eine lineare PDE 2.Ordnung heisst

- **hyperbolisch**, falls $AC - B^2 < 0$
- **parabolisch**, falls $AC - B^2 = 0$
- **elliptisch**, falls $AC - B^2 > 0$
- **mixed type**, falls je nach ~~Vorzeichen~~ Region anders

ändere ich nach der Übungsstunde

- Schreibe die PDE in die Form: $A\, u_{xx} + 2 \cdot B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$
- Bestimme mit "Koeffizientenvergleich" A, B und C
- Bestimme $AC - B^2$ ⇝ hyperbolisch, elliptisch, parabolisch oder mixed type
- Bei mixed type ⇝ Fallunterscheidung nicht vergessen

2)
- Bestimme die partiellen Ableitungen u_t, u_{tt} und u_{xx} in Abhängigkeit von u (falls möglich)
- Gilt $u_t = c^2 \cdot u_{xx}$ (Wärmeleitungsgleichung)?
- Oder gilt $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$ (Wellengleichung)?
- Bestimme die Konstante c.

3) a)
- Separation der Variabeln
- Achtung: $u(x,y)$ ⇝ auch von x abhängig ⇝ was bedeutet das für die Konstante

b)
- Substitution: $v := u_y$
- Separation der Variabeln
- Achtung: $u(x,y)$ ⇝ auch von x abhängig ⇝ was bedeutet das für die Konstante
- Achtung: $u(x,y)$ ⇝ auch von x abhängig ⇝ was bedeutet das für die Konstante

4)
- Für welche ω brauchen wir eine Fallunterscheidung bzw. was müssen wir laut Aufgabenstellung überhaupt berechnen?

(Recap Fourier Transform)

Formel:

2.9 Fourier Transformation

Sei f absolut integrabel, dann ist die Fourier Transformation von f:

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt}$$

Tipps: Euler-Beziehungen (Ch. 8.9 (S.13)), davon meist benötigten Formeln finden Sie hier:

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \cdot \sin(x)$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{\pm i\pi \cdot n} = -1^n$$

5) a) Für welches ω ist Fourier-Integral $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x}\, dx = a \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx$

b) $x \cdot e^{-ax^2}$ gerade / ungerade? ⇝ was bedeutet das für symmetrische Integralgrenzen

c)
- Benütze die folgende Eigenschaft $\mathfrak{F}(x^2 f(x)) = -\mathfrak{F}''(f(x))$ um $\mathcal{F}(x^2 e^{-ax^2})$ zu bestimmen
- Gleiches Vorgehen wie bei a)