Lösung der 1D Wellengleichung

Def. $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, mit $u(t,x)$, welche die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t beschreibt.

c: Konstante ⇒ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Die Wellengleichung ist eine hyperbolische, lineare PDE 2. Ordnung.

Randbedingung (Boundary Conditions)

Randbedingungen geben uns Informationen an gewissen Stellen (Rand) zu allen Zeiten. Beispielsweise $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$

In diesen Fall wäre die Welle an beiden Enden (x=0 und x=L) fest eingespannt unabhängig von der Zeit.

Anfangsbedingung (Initial Conditions)

Anfangbedingungen geben uns Informationen über die Ausgangsposition oder Ausgangsgeschwindigkeit der Wellenfunktion zu einer gewissen Zeit (t=0). Beispielsweise $\begin{cases} u(x,0)=f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0)=g(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$

In diesen Fall hätte die Welle zu Beginn eine Form f(x) mit einer Geschwindigkeit g(x).

Aufgabenstellung: Wir suchen eine Funktion u(x,t), welche die Wellengleichung ($u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$), welche die Randbedingung und Ausgansbedingung ($\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$) und ($\begin{cases} u(x,0)=f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0)=g(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$)

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert:

② Wir bestimmen die Ableitungen, die in der PDE vorkommen:

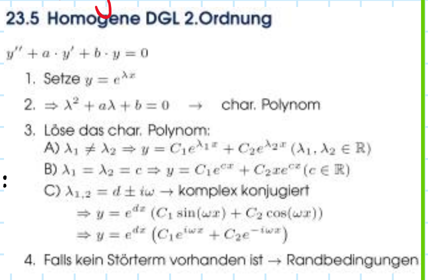
③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein:

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F :

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesen Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Bsp 1.



23.5 Homogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$

1. Setze $y = e^{\lambda x}$
2. $\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow$ char. Polynom
3. Löse das char. Polynom:
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \, (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Rightarrow y = C_1 e^{cx} + C_2 x e^{cx} \, (c \in \mathbb{R})$
   C) $\lambda_{1,2} = d \pm i\omega \rightarrow$ komplex konjugiert
   $\Rightarrow y = e^{dx} \left(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\right)$
   $\Rightarrow y = e^{dx} \left(C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right)$
4. Falls kein Störterm vorhanden ist → Randbedingungen

2 Fallunterscheidung (Many Solutions)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle k=0, k>0, k<0:

① k=0:

Randbedingung:

~> Welle bewegt sich nicht
~> interessiert uns nicht

② k>0:

Randbedingung:

③ $k<0$: ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2+|k|=0$ $\lambda=\pm\sqrt{|k|}i$ $\Rightarrow F(x)= A\cos(\sqrt{|k|}x)+B\sin(\sqrt{|k|}x)$

Randbedingung:

Eingesetzt in die , welche von t abhängt, erhalten wir:

Für die Konstanten verwenden wir Index n, um zu verdeutlichen, dass je nach n möglicherweise unterschiedliche n.

Hier sind B_n und B_n^* die Kombinationen der Konstanten von F und G. Wir haben $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$ definiert.

3 Zusammensetzung der Lösung mit der Fourier Reihe

Bsp. 1

Wir haben eine bzw. unendliche Lösungen, welche die Wellengleichung und ihre Randbedingungen erfüllen, mit unterschiedlichen Frequenzen λ_n. Jedoch erfüllen diese Lösungen meistens die Anfangsbedingungen nicht. Um dieses Problem zu lösen, können wir die Linearität der PDE zu nutze machen und die Lösung als Superposition aller "Basislösungen" darstellen.

Anfangsbedingungen:

-

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer 2L periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also f(x) ungerade, 2L-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

-

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer 2L periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also f(x) ungerade, 2L-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

- Es ist wichtig, dass ihr die Herleitung versteht. So könnt ihr verstehen wie die generelle Lösungen von PDE's konstruiert werden (und möglicherweise musst ihr eine ähnliche "Herleitung" in der Prüfung machen)
- Die Gleichungen, die wir in Bsp. 1 bestimmt haben, können als generelle Lösung für die Wellengleichung verwendet, falls sie die gleichen Randbedingungen besitzen.

Def.

Für eine 1D-Wellengleichung der Form $u_{tt}=c^2u_{xx}$ und den Randbedingungen $x\in[0,L]$: $\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

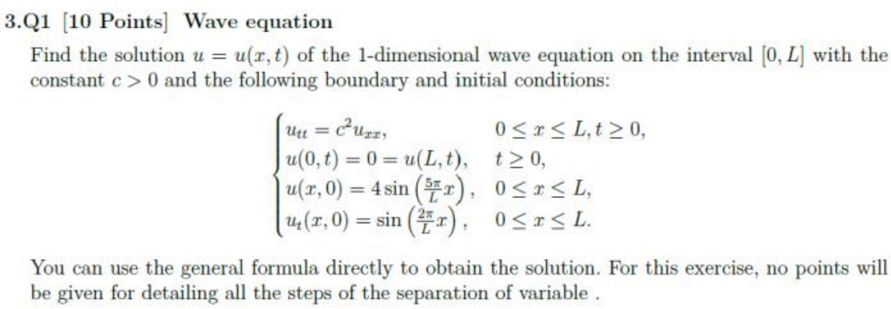
finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos(\lambda_n t)+B_n^*\sin(\lambda_n t))\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ mit $\lambda_n:=\frac{cn\pi}{L}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$ $B_n^*=\frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

Bsp. 2

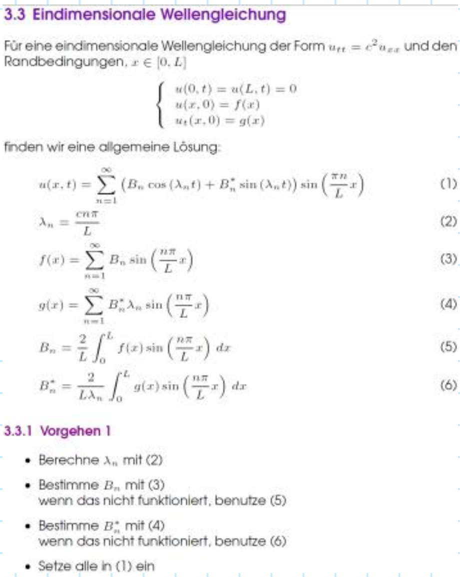


3.Q1 [10 Points] **Wave equation**

Find the solution $u = u(x,t)$ of the 1-dimensional wave equation on the interval $[0, L]$ with the constant $c > 0$ and the following boundary and initial conditions:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

You can use the general formula directly to obtain the solution. For this exercise, no points will be given for detailing all the steps of the separation of variable .



3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{4}$$

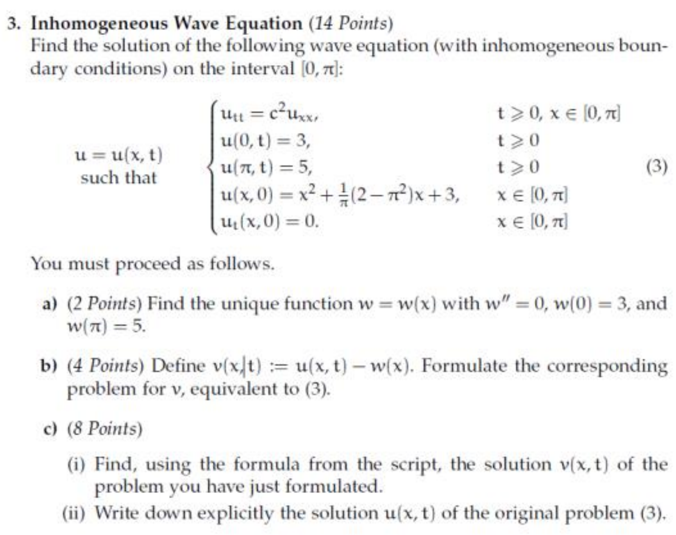
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Prüfungsaufgabe Winter 2019



3. Inhomogeneous Wave Equation (*14 Points*)
Find the solution of the following wave equation (with inhomogeneous boundary conditions) on the interval $[0, \pi]$:

$$u = u(x,t) \text{ such that } \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 3, & t \geqslant 0 \\ u(\pi,t) = 5, & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x^2 + \frac{1}{\pi}(2-\pi^2)x + 3, & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = 0. & x \in [0,\pi] \end{cases} \quad (3)$$

You must proceed as follows.

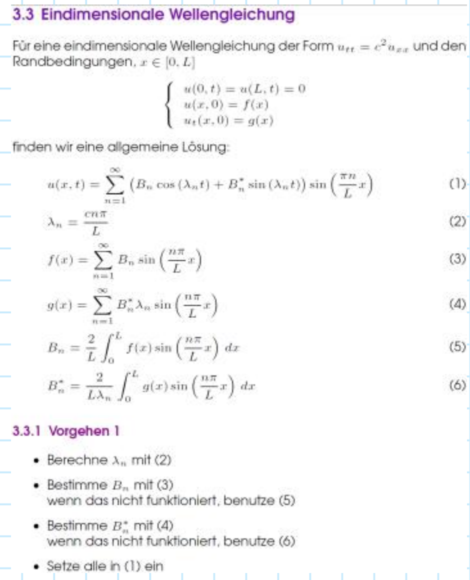
a) (*2 Points*) Find the unique function $w = w(x)$ with $w'' = 0$, $w(0) = 3$, and $w(\pi) = 5$.

b) (*4 Points*) Define $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$. Formulate the corresponding problem for v, equivalent to (3).

c) (*8 Points*)

(i) Find, using the formula from the script, the solution $v(x,t)$ of the problem you have just formulated.

(ii) Write down explicitly the solution $u(x,t)$ of the original problem (3).



3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (1)$$

$$\lambda_n = \frac{c n \pi}{L} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (4)$$

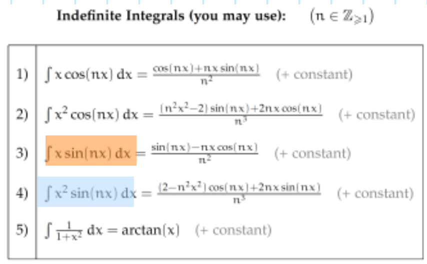
$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (5)$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (6)$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Bsp.3



Indefinite Integrals (you may use): $(n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1})$

1) $\int x \cos(nx)\, dx = \frac{\cos(nx) + nx \sin(nx)}{n^2}$ (+ constant)
2) $\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{(n^2x^2 - 2)\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3}$ (+ constant)
3) $\int x \sin(nx)\, dx = \frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$ (+ constant)
4) $\int x^2 \sin(nx)\, dx = \frac{(2 - n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}$ (+ constant)
5) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$ (+ constant)

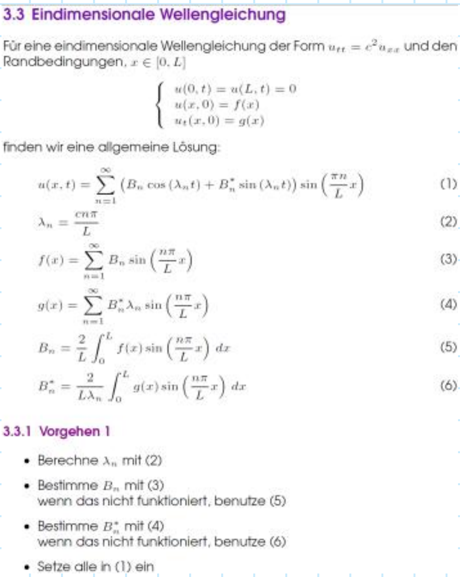
Tipps Serie 9

🟩 = wichtig
🟨 = hilfreich
🟥 = nicht so wichtig

1) siehe Bsp 1): Kochrezept: 1. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$
   a) berechne u_{tt} und u_{xx}
   b) trenne G von F
   c) notiere 2 Gleichungen eine nur mit F und eine nur mit G

2. Betrachte alle Fälle für F-Gleichung d.h. $k=0$, $k>0$, $k<0$
   a) Setze Randbedingungen ein
   b) $G(t)$ am Schluss berechnen

3. Superposition der n-Lösungen
   a) Erfülle die Anfangsbedingungen mit der Fourier-Reihe

2)


3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Verwende die allgemeine Formel für die Wellengleichung (siehe Beispiel 2)

3) a) b) c) siehe Bsp 1): Kochrezept: 1. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$
   a) berechne u_{tt} und u_{xx}
   b) trenne G von F
   c) notiere 2 Gleichungen eine nur mit F und eine nur mit G

2. Löse die ODE von F und g (keine Fallunterscheidung nötig!)
   ↑ keine Randbedingung

3. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

4) siehe Bsp 3)