Lösung der 1D Wellengleichung

Def. $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, mit $u(t,x)$, welche die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t beschreibt.

c: Konstante ⇒ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

Die Wellengleichung ist eine hyperbolische, lineare PDE 2. Ordnung.

Randbedingung (Boundary Conditions)

Randbedingungen geben uns Informationen an gewissen Stellen (Rand) zu allen Zeiten. Beispielsweise $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$

In diesem Fall wäre die Welle an beiden Enden ($x=0$ und $x=L$) fest eingespannt unabhängig von der Zeit.

Anfangsbedingung (Initial Conditions)

Anfangbedingungen geben uns Informationen über die Ausgangsposition oder Ausgangsgeschwindigkeit der Wellenfunktion zu einer gewissen Zeit ($t=0$). Beispielsweise $\begin{cases} u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$

In diesem Fall hätte die Welle zu Beginn eine Form $f(x)$ mit einer Geschwindigkeit $g(x)$.

Aufgabenstellung: Wir suchen eine Funktion $u(x,t)$, welche die Wellengleichung ($u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$), welche die Randbedingung und Ausgangsbedingung ($\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$) und ($\begin{cases} u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le L \end{cases}$)

1 Separation der Variabeln

① Wir nehmen an, dass eine Lösung der folgenden Form existiert: $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

② Wir bestimmen die Ableitungen die in der PDE vorkommen:

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(F \cdot G) = F \frac{\partial^2}{\partial t^2} G = F \ddot{G}$$

↑ F(x) wie eine konstante Faktor bzgl. t

$$u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F \cdot G) = G \frac{\partial^2}{\partial x^2} F = F'' G$$

③ Wir setzen die gefundenen Ableitungen in die PDE ein: $F \ddot{G} = c^2 F'' G$

④ Wir formen die PDE um und "trennen" G und F: $\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$

Hierbei ist wichtig zu bemerken, dass die rechte Seite von t unabhängig und die linke Seite von x unabhängig ist. Aus diesem Grund machen wir das! k ist eine Konstante, die weder von t und x abhängt.

Wir können die Gleichung als Gleichungssystem umschreiben:

Bsp 1. $\begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 k G \end{cases}$ ⇒ Dass sind jetzt zwei ODE's

23.5 Homogene DGL 2.Ordnung

$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$

1. Setze $y = e^{\lambda x}$
2. $\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \rightarrow$ char. Polynom
3. Löse das char. Polynom:
   A) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \; (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$
   B) $\lambda_1 = \lambda_2 = c \Rightarrow y = C_1 e^{cx} + C_2 x e^{cx} \; (c \in \mathbb{R})$
   C) $\lambda_{1,2} = d \pm i\omega \rightarrow$ komplex konjugiert
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)\right)$
   $\Rightarrow y = e^{dx}\left(C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}\right)$
4. Falls kein Störterm vorhanden ist → Randbedingungen

2 Fallunterscheidung (Many Solutions)

Wir lösen die erste Gleichung und betrachten die Fälle $k=0$, $k>0$, $k<0$:

① $k=0$: $F''=0$ $\quad \frac{d^2F}{dx^2} = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} \frac{dF}{dx} = A \overset{\int dx}{\Rightarrow} F(x) = Ax + B$

Randbedingung: $F(0) = B = 0 \quad F(L) = A \cancel{L} = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

⤳ Welle bewegt sich nicht
⤳ interessiert uns nicht

② $k>0$: $F'' - kF = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 - k = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|} \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{|k|}x} + B e^{-\sqrt{|k|}x}$

Randbedingung: $F(0) = A + B = 0 \quad A = -B \qquad F(L) = A\left(e^{\sqrt{|k|}L} - e^{-\sqrt{|k|}L}\right) = 2A \sinh(\sqrt{|k|}L) = 0 \;\; \forall k>0 \Rightarrow A = 0$

$F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ (triviale Lösung)

③ $k<0$: $F'' + |k|F = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten: $\lambda^2 + |k| = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{|k|}\,i \Rightarrow F(x) = A\cos(\sqrt{|k|}x) + B\sin(\sqrt{|k|}x)$

Randbedingung: $F(0) = A = 0 \qquad F(L) = B\sin(\sqrt{|k|}L) = 0 \;\forall k<0$

$\Rightarrow B=0 \quad F(x)=0 \Rightarrow u(x,t)=0$ (triviale Lösung)

$\Rightarrow$ oder $\sqrt{|k|}L = n\pi \overset{k<0}{\Rightarrow} k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Eingesetzt in die $\ddot{G} = c^2 k G$, welche von t abhängt, erhalten wir:

$\ddot{G} + c^2\left(\frac{c n}{L}\right)^2 G = 0 \Rightarrow$ ODE mit konstanten Koeffizienten $\lambda^2 + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad \lambda = \pm\frac{cn\pi}{L}i \Rightarrow G_n(t) = C_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + D_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$

Für die Konstanten verwenden wir Index n, um zu verdeutlichen, dass je nach n möglicherweise unterschiedliche n.

$u_n(x,t) = \left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

Hier sind B_n und B_n^* die Kombinationen der Konstanten von F und G. Wir haben $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$ definiert.

3 Zusammensetzung der Lösung mit der Fourier Reihe

Bsp. 1

Wir haben eine bzw. unendliche Lösungen, welche die Wellengleichung und ihre Randbedingungen erfüllen, mit unterschiedlichen Frequenzen λ_n. Jedoch erfüllen diese Lösungen meistens die Anfangsbedingungen nicht. Um dieses Problem zu lösen, können wir die Linearität der PDE zu Nutze machen und die Lösung als Superposition aller "Basislösungen" darstellen.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Anfangsbedingungen: • $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer $2L$ periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also $f(x)$ ungerade, $2L$-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

• $u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n B_n\sin(\lambda_n t) + B_n^*\lambda_n\cos(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n B_n^*\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit $B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Hinweis: Die linke Gleichung widerspiegelt eine Fourier Reihe einer $2L$ periodischen, ungeraden Funktion. Wenn wir also $f(x)$ ungerade, $2L$-erweitern können wir B_n als Koeffizienten der erweiterten Funktion bestimmen

- Es ist wichtig, dass ihr die Herleitung versteht. So könnt ihr verstehen wie die generelle Lösungen von PDE's konstruiert werden (und möglicherweise musst ihr eine ähnliche 'Herleitung' in der Prüfung machen)
- Die Gleichungen, die wir in Bsp. 1 bestimmt haben, können als generelle Lösung für die Wellengleichung verwendet, falls sie die gleichen Randbedingungen besitzen.

Def.

Für eine 1D-Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen $x \in [0,L]$: $\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$

finden wir eine allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos(\lambda_n t) + B_n^*\sin(\lambda_n t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ mit $\lambda_n := \frac{cn\pi}{L}$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

Prüfungsaufgabe Sommer 2023

3.Q1 [10 Points] **Wave equation**

Find the solution $u = u(x,t)$ of the 1-dimensional wave equation on the interval $[0, L]$ with the constant $c > 0$ and the following boundary and initial conditions:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

You can use the general formula directly to obtain the solution. For this exercise, no points will be given for detailing all the steps of the separation of variable .

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Bsp. 2

- $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$
- $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right) \Rightarrow \begin{cases} B_n = 4 & \text{falls } n=5, \\ B_n = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$

  $\Rightarrow \begin{cases} B_n^* = \frac{1}{\frac{cn\pi}{L}} = \frac{L}{cn\pi} = \frac{L}{2c\pi} & \text{falls } n=2, \\ B_n^* = 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $u(x,t) = \frac{L}{2c\pi}\sin\left(\frac{2c\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + 4\cos\left(\frac{5c\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{L}x\right)$

Prüfungsaufgabe Winter 2019

3. Inhomogeneous Wave Equation *(14 Points)*
Find the solution of the following wave equation (with inhomogeneous boundary conditions) on the interval $[0, \pi]$:

$$u = u(x,t) \text{ such that } \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geqslant 0,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 3, & t \geqslant 0 \\ u(\pi,t) = 5, & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x^2 + \frac{1}{\pi}(2-\pi^2)x + 3, & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = 0. & x \in [0,\pi] \end{cases} \quad (3)$$

You must proceed as follows.

a) *(2 Points)* Find the unique function $w = w(x)$ with $w'' = 0$, $w(0) = 3$, and $w(\pi) = 5$.

b) *(4 Points)* Define $v(x,t) := u(x,t) - w(x)$. Formulate the corresponding problem for v, equivalent to (3).

c) *(8 Points)*

(i) Find, using the formula from the script, the solution $v(x,t)$ of the problem you have just formulated.

(ii) Write down explicitly the solution $u(x,t)$ of the original problem (3).

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (4)$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (5)$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (6)$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

ODE ändert sich nicht da zweite Ableitung gleich null und nicht von t abhängig ist → erhalten homogene Randbedingungen

Bsp.3

a) $w'' = 0 \overset{\int dx}{\Rightarrow} w' = a \overset{\int dx}{\Rightarrow} w = ax + b \quad w(0) = b = 3 \quad w(\pi) = a\pi + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi} \quad \underline{\underline{w(x) = \frac{2}{\pi}x + 3}}$

b) $v(0,t) = u(0,t) - w(0) = 3 - 3 = 0$; $v(\pi,t) = u(\pi,t) - w(\pi) = 5 - 5 = 0$

$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = x^2 + \frac{1}{\pi}(\cancel{2} - \pi^2)x + \cancel{3} - \left(\cancel{\frac{2}{\pi}x} + \cancel{3}\right) = x^2 - \pi x \qquad v_t(x,0) = u_t(x,0) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} w(x)} = 0$

$$v = v(x,t) \text{ such that } \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & t \geq 0,\ x \in [0,\pi] \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x,0) = x^2 - \pi x & x \in [0,\pi] \\ v_t(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

c) i) $v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(B_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + B_n^* \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{L=\pi}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(cnt) + B_n^* \sin(cnt)) \sin(nx)$

$v_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow B_n^* = 0$

Indefinite Integrals (you may use): $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

1)	$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{\cos(nx) + nx\sin(nx)}{n^2}$	(+ constant)
2)	$\int x^2\cos(nx)\,dx = \frac{(n^2x^2-2)\sin(nx) + 2nx\cos(nx)}{n^3}$	(+ constant)
3)	$\int x\sin(nx)\,dx = \frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$	(+ constant)
4)	$\int x^2\sin(nx)\,dx = \frac{(2-n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}$	(+ constant)
5)	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$	(+ constant)

$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2 - \pi x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx - 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{(2-n^2x^2)\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} - 2\left.\frac{\sin(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(2-n^2\pi^2)(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right) - 2\left(\frac{-n\pi(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{(4 - \cancel{2n^2\pi^2} + \cancel{2n^2\pi^2})(-1)^n - 4}{n\pi^3} = \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2j \\ -\frac{8}{\pi n^3} & n = 2j+1 \end{cases}$$

$v(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^3} \cos(cnt) \cdot \sin(nx) = \underline{\underline{\frac{-8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^3} \cos(c(2j+1)t) \sin((2j+1)x)}}$

ii) $u(x,t) = v(x,t) + w(x) = \underline{\underline{\frac{-8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^3} \cos(c(2j+1)t) \sin((2j+1)x) + \frac{2}{\pi}x + 3}}$

Tipps Serie 9

$\not\!\!\!{}$ = wichtig
$\not\!\!\!{}$ = hilfreich
$\not\!\!\!{}$ = nicht so wichtig

1) siehe Bsp 1): Kochrezept: 1. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$
   a) berechne u_{tt} und u_{xx}
   b) trenne G von F
   c) notiere 2 Gleichungen eine nur mit F und eine nur mit G

   2. Betrachte alle Fälle für F-Gleichung d.h. $k=0, k>0, k<0$
   a) Setze Randbedingungen ein
   b) G(t) am Schluss berechnen

   3. Superposition der n-Lösungen
   a) Erfülle die Anfangsbedingungen mit der Fourier-Reihe

2)

3.3 Eindimensionale Wellengleichung

Für eine eindimensionale Wellengleichung der Form $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ und den Randbedingungen, $x \in [0, L]$

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

finden wir eine allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \tag{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{3}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{5}$$

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{6}$$

3.3.1 Vorgehen 1

- Berechne λ_n mit (2)
- Bestimme B_n mit (3)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (5)
- Bestimme B_n^* mit (4)
  wenn das nicht funktioniert, benutze (6)
- Setze alle in (1) ein

Verwende die allgemeine Formel für die Wellengleichung (siehe Beispiel 2)

3) a) b) c) siehe Bsp 1): Kochrezept: 1. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$
   a) berechne u_{tt} und u_{xx}
   b) trenne G von F
   c) notiere 2 Gleichungen eine nur mit F und eine nur mit G

   2. Löse die ODE von F und g (keine Fallunterscheidung nötig!)
   ↳ keine Randbedingung

   3. $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$

4) siehe Bsp 3)