Organisatorisches

▷ Materialien auf Website: https://n.ethz.ch/~rpeedikayil/

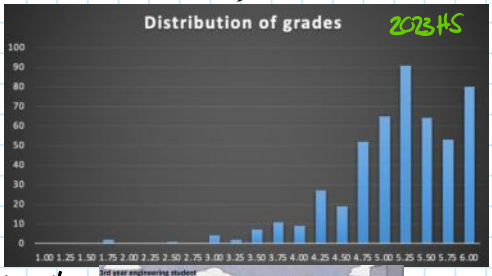
- Übungsnotizen jeweils spätestens um 15:00 am Donnerstag hochgeladen
- Nach der Übungsstunde ⇝ komplette Notizen

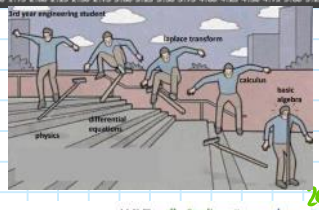
▷ Ablauf:
- Falls nötig Nachbesprechung der letzten Serie
- Theorie mit Beispielen (u.a. alten Prüfungsaufgaben) } ca. 60min
- Tipps für neue Serie
- Fragen und selbständiges Lösen der Serie } ca. 30min.

▷ Serien:
- Serie 0 ⇝ Repetition Analysis I/II: • Partialbruchzerlegung, Differentialgleichungen (ODE)
  Partielle Integration, Integration mit Substitution
- Serien + MC auf Moodle ⇝ prüfungsrelevant
  ↳ Abgabe auf Moodle möglich (am folgenden Mittwoch bis Mitternacht) ⇝ kein Bonus ...
  ⇝ für Serie 1 jetzt Donnerstag ⇝ vermutlich zu Fehler
  ↳ Im Besten Aufgaben markieren, die korrigiert werden sollen bzw. unklar sind
  ↳ Sonst wird mind. 1 Aufgabe ausführlich korrigiert
  ↳ Korrektur kommt circa eine Woche nach Abgabe

▷ Fragen:
- E-Mail: rpeedikayil@eth.ch
- "General Forum" or "Group specific Forum" auf Moodle
- Study Center: Donnerstag 18-20Uhr (Ab 3.tes Semesterwoche)

▷ Prüfung:
- 4 Credits
- Format: 9 x SC-Fragen (ca. 50%)
  2 x Offene Fragen (ca. 50%)
- 2 Stunden
- Erlaubte Hilfsmittel:
  ↳ 20 A4 Seiten / 10 Blätter Zusammenfassung
  → Meine Zusammenfassung findet Ihr auf meiner Website
  → Druckt ZF so früh wie möglich aus
  ↳ Englisch ⇔ Deutsch-Wörterbuch





2023HS

Prüfungsblock I (neues Reglement)	MAVT			alle Studiengänge			davon Repetenten		
	# Stud.	Ø		std. dev.		# best.	# nicht best.	bestanden	
Gesamt	398	4.65		0.56		364	34	91.5%	
Thermodynamik I	428	4.16	4.15	0.81	0.80			67.8%	
Mechanics III	522	4.48	4.44	0.64	0.65			81.0%	
Control Systems I	451	4.79	4.78	0.62	0.62			92.2%	
Elektrotechnik	452	4.71	4.63	0.80	0.84			81.6%	
Analysis III	487	5.20	5.16	0.66	0.68			94.3%	

2022HS

Prüfungsblock I	MAVT			alle Studiengänge			davon Repetenten		
	# Stud.		Ø		std. dev.		# best.	# nicht best.	bestanden	
Gesamt	402	27	4.58		0.59		344 18	58 9	85.6%	66.7%
Thermodynamik I	360		4.3	4.3	0.81	0.81			71.4	
Dimensionieren I	359		4.35	4.35	0.92	0.92			79.4	
Dynamics	483		4.62	4.54	0.65	0.69			82.3	
Regelungstechnik I	373		4.75	4.76	0.67	0.67			87.7	
Analysis III	396		4.84	4.8	0.79	0.84			88.9	

2021HS

Prüfungsblock I	MAVT			alle Studiengänge			davon Repetenten		
	# Stud.		Ø		std. dev.		# best.	# nicht best.	bestanden	
Gesamt	354	25	4.55		0.65		296 18	58 7	83.6%	72.0%
Thermodynamik I	360		4.08	4.07	0.87	0.87			66.4%	
Dimensionieren I	359		4.46	4.46	0.90	0.89			68.8%	
Dynamics	483		4.35	4.30	0.82	0.85			77.4%	
Regelungstechnik I	373		4.61	4.61	0.71	0.71			91.9%	
Analysis III	396		5.59	5.60	0.62	0.62			97.0%	

▷ Prüfungsvorbereitung:
- Theorie repetieren und üben mit PVK von Giacek Zardini (falls nötig) } findet Ihr auf meiner Website
- Alte Prüfungen von Iozzi lösen

▷ Analysis III: Laplace Transform, Fourier Analysis, Partial Differential Equations

Laplace Transformation

Differentialgleichung
$f(t)$
" Zeitbereich "

$\mathcal{L}$ ⟶ ⟵ $\mathcal{L}^{-1}$

Algebraische Gleichung
$\mathcal{L}(f(t))(s)$ oder $F(s)$

⇝ Mit Laplace-Transforms können wir gewisse „DGL" viel einfacher lösen

⇝ wird in Elektrotechnik und Controls Systems verwendet

Def. $$\boxed{F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\,dt \qquad s \in \mathbb{C}}$$

$\mathcal{L}(f(t))(s)$ existiert im Interval (k,∞):

- $f(t)$ ist "piecewise continuous"/stückweise stetig:
  - unterteilbar, sodass jedes Intervall stetig
  - unterteilbar, sodass an den Endpunkten eines Intervalls endliche Grenzwerte sind

Bsp. 1 Welcher dieser Funktionen ist piecewise continuous?

- $f(t)$ ist wachstumsbeschränkt, wenn $M, k \in \mathbb{R}$ mit $M, k > 0$ gibt, sodass $|f(t)| \leq Me^{kt}$
  ⇝ d.h. f ist (höchstens) von exponentieller Ordnung

Berechnung Laplace Transform: 1. Integral (Definition) (Bsp. 2/3)
↳ (Partielle Integration, Substitution)
2. Umformen/Vereinfachen (Eigenschaften) und Tabelle (Bsp. 4)
↳ (Partialbruchzerlegung, trig. Identitäten etc.)

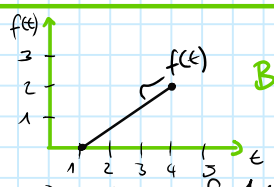
Bsp. 2 $f(t) = \cos(\omega t)$ $\qquad F(s) = ?$

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos(\omega t)(s)) = \int_0^\infty \cos(\omega t)\cdot e^{-st}\,dt \overset{\text{Part. Integration}}{=} -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(\omega t)\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin(\omega t)\,dt$$

$$\overset{\text{Part. Integration}}{=} 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) - \frac{\omega}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\sin(\omega t)\Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos(\omega t)\,dt\right) = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Bsp. 3.



Bestimmen Sie $\mathcal{L}(f(t))(s)$.

1) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, & t \in [1,4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2) $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2}\int_1^4 e^{-st}(t-1)\,dt = \frac{1}{2}\left((t-1)\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-st}\Big|_1^4 - \left(-\frac{1}{s}\right)\int_1^4 e^{-st}\,dt\right)$

← in den anderen Bereich ist das Integral 0, da $f(t)=0$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{s}e^{-4s} - \left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_1^4\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}\right)$$

Linearität

i. $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$ (Funktionen, Skalar)

ii. $\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G)$

$\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^{-1}$ sind linear

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Bsp. 4 $f(t) = 1 + 2t + 3t^3 \quad F(s) = ?$

$$\mathcal{L}(1 + 2t + 3t^3) = \mathcal{L}(1) + 2\mathcal{L}(t) + 3\mathcal{L}(t^3) \overset{\text{siehe Tabelle}}{=} \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3 \cdot 3!}{s^{3+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{18}{s^4}}}$$

S-Shifting

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

$$e^{+at} \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$$

Bsp. 5 $f(t) = e^{-at} \cdot t \quad F(s) = ?$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \cdot t) = \mathcal{L}(t)(s+a) = \underline{\underline{\frac{1}{(s+a)^2}}} \qquad \mathcal{L}(t) \overset{\text{siehe Tabelle}}{=} \frac{1}{s^2}$$

Inverse Laplace Transformation

Keine analytische Definition für $\mathcal{L}^{-1}$ wie bei $\mathcal{L}$ $\rightsquigarrow$ Reverse Engineering $\begin{cases} \text{1. Umformen/Vereinfachen} \\ \text{2. Tabellen} \end{cases}$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

Bsp 6. $F(s) = \frac{4}{s^3} - \frac{1}{s-1} \quad f(t) = ?$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^3} - \frac{1}{s-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = \underline{\underline{2t^2 - e^t}}$$

Bsp 7. $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13} \quad f(t) = ?$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 9 - 9 + 13} = \frac{1}{(s+3)^2 + 2^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin(2t) \cdot e^{-3t}}}$$

Bsp 8. $F(s) = \frac{s}{s^2 - 1} \quad f(t) = ?$

$$F(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \quad \Big| \cdot (s-1) \cdot (s+1)$$

$$s = A(s+1) + B(s-1)$$

$$1: \quad 0 = A - B \Rightarrow A = B$$

$$s: \quad 1 = A + B \quad \hookrightarrow 1 = 2A \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} \quad \Big| \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} = \underline{\underline{\cosh(t)}}$$

1 Laplace Transformation

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$t^a, a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$u(t-a), a \geqslant 0$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$t^n, n \in \mathbb{Z} \geqslant 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a \geqslant 0$	e^{-as}

14 Partialbruchzerlegung

1. einfache Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)}$
2. doppelte Nullstelle: $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
3. komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{(z \cdot B \cdot x^2+1)}$

Beispiel: $\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

$= \frac{A \cdot (x+1) \cdot (x-1) + B \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) + C \cdot (x+1)^3}{(x+1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)}$

$$\left| \begin{array}{c} -A - B + C = 0 \\ -B + 3C = 1 \\ A + B + 3C = 0 \\ B + C = 0 \end{array} \right| \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$$

Tipp: $(1 + x^3) = (1 + x)(1 - x + x^2)$

Tipps Serie 1

= wichtig

= hilfreich

= nicht so wichtig

1) a) Linearität und dann Tabellen verwenden

b) Linearität und dann Tabellen verwenden

c) • Laplace Transform (Integral) $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(s)$ mit dem gegeben Integral $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ beschreiben und das gegebene Resultat verwenden

• Substitution $e^{-st} \rightarrow e^{-t}$?

2) • Mathematische Beschreibung der Funktion $f(t)$ des Skizze entnehmen

• Integral aufteilen, sodass wir piecewise continuous Intervalle haben

• Integrale auswerten / (Tabellen verwenden (in diesem Fall einbisschen aufwendiger))

3) • $\sin(\omega t)$ durch Summe beschreiben

• Linearität verwenden und dann Tabellen verwenden

4) a) Substitution $e^{-t} \rightarrow e^{-x^2}$

b) • Für welche $f(t)$ gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$?

• Zeige, dass e^{-x^2} diese Eigenschaft besitzt

c) • Kartesische Koordinaten $\Leftrightarrow$ Polarkoordinaten $\Rightarrow dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ und $r^2 = x^2 + y^2$

• Wie ändern sich die Grenzen des Integrals, wenn wir zu Polarkoordinaten wechseln?

d) • Welchen Wertebereich hat die Funktion im Integral?

• Kann man dadurch etwas über das Vorzeichen aussagen?