

# Mechanik 2: Übungsstunde 8

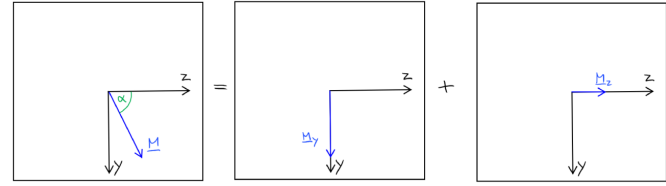
Rijo Peedikayil

24.04.2024

## Theorie: Woche 8

### 1 Schiefe Biegung

Bisher wurden nur Biegemomente betrachtet, die parallel zu den Querschnittshauptachsen (y- und z-Achse) wirken. In diesem Abschnitt wird die schiefe Biegung behandelt, bei der der Biegemomentenvektor eine beliebige Richtung auf der yz-Ebene haben kann. Hierzu kann der Momentenvektor in eine y- und z Komponente projiziert werden, dann kann man die Spannungen für diese Achsen bestimmen und danach superponieren.



In dieser Abbildung gilt:  $M_y = M \cdot \sin(\alpha)$ ,  $M_z = M \cdot \cos(\alpha)$

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

### 2 Schubspannung durch Querkraft

#### 2.1 Vollquerschnitt

Die Querkraft  $Q_y$  erzeugt einen statisch äquivalenten Schubspannungsverlauf  $\tau_{xy}(y)$ . Die Schubspannung ist über die Querschnittshöhe  $y$  konstant. Die Formel für die Schubspannung lautet:

$$\tau_{xy}(y) = \left( \frac{Q_y}{I_z} \right) \frac{1}{b(y)} \int_{\Delta A} y dA = \left( \frac{Q_y}{I_z} \right) \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

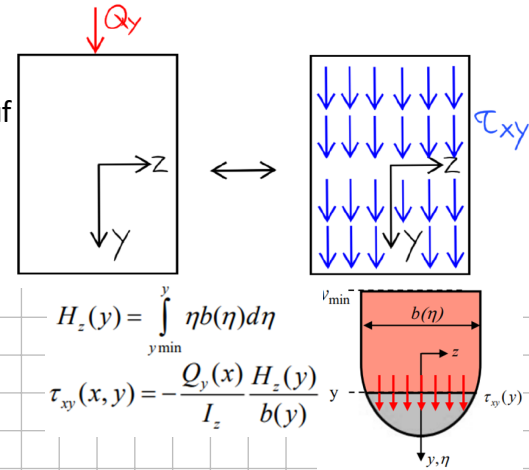
Parameter:

$Q_y$ : Querkraft

$H_z(y)$ : Statisches Moment von der betrachteten Stelle  $y$

$I_z$ : Flächenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse

$b(y)$ : Breite des Querschnitts in Höhe  $y$

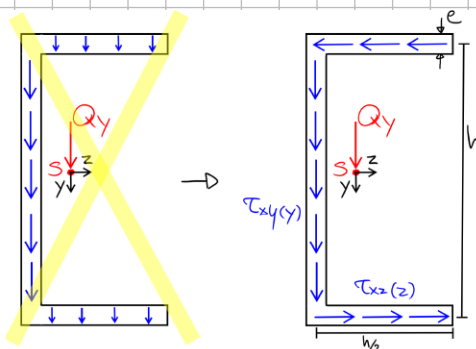


Das statische Moment hat keine direkte geometrische Bedeutung. Es ist ein Hilfsmittel zur Berechnung von anderen Größen. Bei dünnwandigen Querschnitten lassen sich Vereinfachungen treffen und das statische Moment lässt sich dann oft einfacher berechnen.

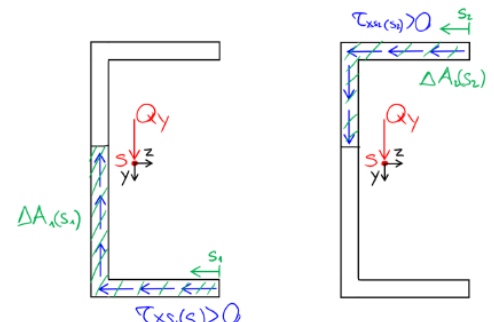
#### 2.2 Dünnwandige Querschnitte

Dünnwandige Querschnitte haben eine große Länge im Vergleich zur Breite ( $e \ll h$ ). Die Querkraft  $Q$  folgt der Mittellinie des Querschnitts. Es entstehen Schubspannungen  $\tau_{xy}(y)$  und  $\tau_{xz}(z)$ . Die Schubspannungen sind in der Wandmitte am grössten und nehmen zu den Wänden hin ab (freie Oberflächen).

$$H_z(s) = \underbrace{\iint_{\Delta A} y dA}_{\text{alle Profile}} = \underbrace{\int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) d\eta}_{\text{alternative Schreibweise}} \Rightarrow y_{SP} \cdot \underbrace{\Delta A}_{\text{für Rechtecke}}$$



$$\tau_{xs}(s) = - \left( \frac{Q_y}{I_z} \right) \frac{1}{e(s)} \int_{\Delta A} y dA = - \left( \frac{Q_y}{I_z} \right) \frac{H_z(s)}{e(s)}$$



Bemerkung: Es spielt keine Rolle, ob die Länge  $h$  bis in die Mitte oder bis zum Rand der Querschnittsbreite definiert ist, da  $e \ll h$ .

## 2.3 Vorgehen: Schubspannung durch Querkraft (Allgemein)

### 1. Schritt: Schwerpunkt bestimmen

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Querschnitts. Dies ist notwendig, um die statischen Momente der Teilflächen zu berechnen.

### 2. Schritt: Teilflächen bestimmen

Zerlegen Sie den Querschnitt in Teilflächen. Dies vereinfacht die Integration bei der Berechnung des statischen Moments.

### 3. Schritt: s einführen (bei dünnwandigen Querschnitten)

Führen Sie die lokale Koordinate s entlang der Mittellinie des Querschnitts ein.

### 4. Schritt: Statisches Moment berechnen

Berechnen Sie das statische Moment S für jede Teilfläche.

- Vollquerschnitte:

Integrieren Sie die Teilfläche von  $y_{\min}$  nach  $y$ .

- Dünnwandige Querschnitte:

Lassen Sie die Teilfläche in s-Richtung wachsen.

Starten Sie die Laufvariable s von einer freien Oberfläche (wo  $\tau_{xs} = 0$ ).

### 5. Schritt: Schubspannungen berechnen

Berechnen Sie die Schubspannungen für jede Teilfläche.

### 2.3.1 Vorgehen: Schubspannung durch Querkraft

#### 1. Schwerpunkt der Querschnittsform bestimmen: Nutzen Sie

Symmetrieachsen und Elementarflächen.

#### 2. Teilflächen für die Berechnung von $\tau_{xs}(s)$ bestimmen: Wählen Sie die

Teilflächen so, dass sich  $y(s) \cdot e(s)$  auf einem Abschnitt gut integrieren lässt. Teilen Sie kantige Profile in den Ecken und Kreisbögen mit Zylinderkoordinaten integriert werden.

#### 3. Lokale Laufvariable vom Rand her einführen: Für Profile mit

Verzweigungen müssen mehrere Variablen eingeführt werden. Die Art der Einführung ist irrelevant für das Ergebnis.

#### 4. Statisches Moment für die erste Teilfläche berechnen:

$$H_{z,1}(s) = \int y(s) \cdot e(s) ds$$

#### 5. Statisches Moment für die nächste Fläche berechnen und

**addieren:** Wiederholen Sie Schritt 4 für jede Teilfläche und addieren Sie den Endwert zur Summe der vorherigen Flächen:

$$H_{z,2}(s) = \underbrace{H_{z,1}}_{y_1 \cdot \Delta A_1} + \int y(s) \cdot e(s) ds, \quad H_{z,3}(s) = \underbrace{H_{z,2}}_{y_1 \cdot \Delta A_1 + y_2 \cdot \Delta A_2} + \int y(s) \cdot e(s) ds$$

#### 6. Schubspannung berechnen: $\tau_{xs}(s) = - \left( \frac{Q_y}{I_z} \right) \frac{H_z(s)}{e(s)}$

$$\tau_{xs}(x, s) = - \frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{H_z(s)}{e(s)}$$

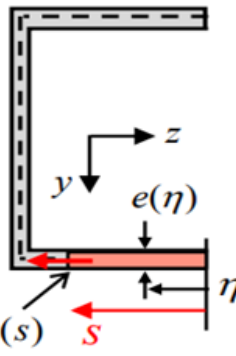
$$H_z(s) = \int_0^s y(\eta) e(\eta) d\eta$$

Bei Polarkoordinaten

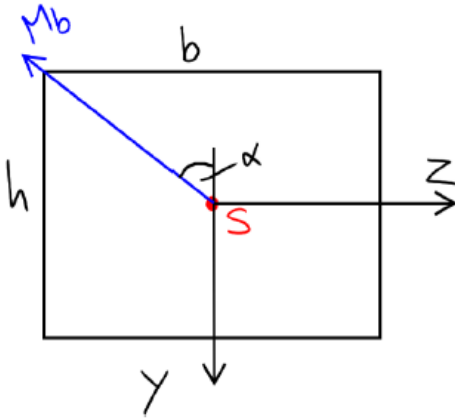
$$d\eta = r \cdot d\varphi$$

$$y = \pm r \cdot \sin\varphi$$

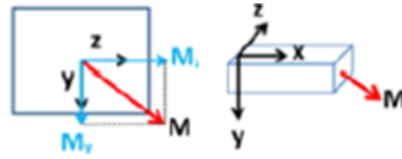
$$H_z = y_s \cdot \Delta A \text{ (für Rechtecke)} \quad \tau_{xs}(s)$$



## Aufgabe S1:



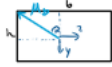
Man bestimme die maximale Normalspannung in dem auf schiefe Biegung belasteten rechteckigen Querschnitt.



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} * z - \frac{M_z}{I_z} * y$$

① Momente in y- und z-Komponente unterteilen  
*Achtung Mb ist negativ!*

② Winkel anhand der Geometrie bestimmen



Falls Mb wie in der Skizze genau in der Ecke zeigt, kann man sie in y und z durch b und h ausdrücken.

③ Flächenträgheitsmoment bestimmen

	①	②	③
	$I_y$	$I_y$	$I_y$
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{\pi \cdot b^4}{64}$
2	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{\pi \cdot b^4}{64}$
3	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{\pi \cdot b^4}{64}$



*h und b genau andersherum definiert*

④ Spannung durch spezielle Biegung bestimmen

$$\sigma_x(x, y, z) =$$

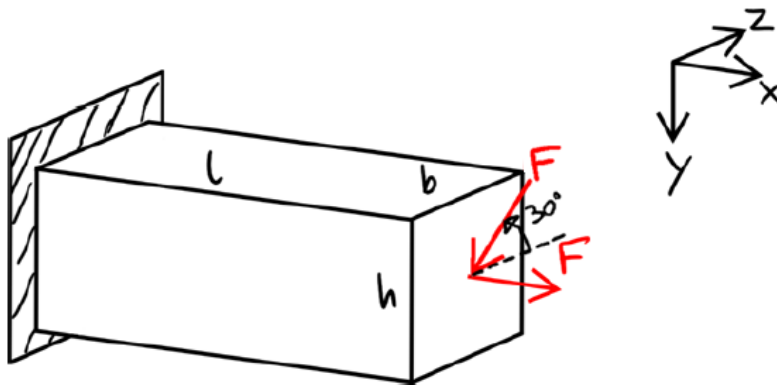
$$\sigma_x(x, -\frac{h}{2}, \frac{b}{2}) :$$

$$\sigma_x(x, \frac{h}{2}, -\frac{b}{2}) :$$

(Max. Druck) } *Mb ist negativ!*  
(Max. Zug.) }

# Aufgabe H1 (schiefe Biegung)

Gegeben sei ein Kragarm der Länge  $L$  mit rechteckigem Querschnitt. Am freien Ende greift eine Axialkraft mit dem Betrag  $F$  an. Des Weiteren wirkt in der  $y$ - $z$ -Ebene eine um  $30^\circ$  bezüglich der  $z$ -Achse geneigte Querkraft mit dem Betrag  $F$ . Die Kraftangriffspunkte liegen auf der Balkenmittellinie.



Man bestimme den maximal zulässigen Betrag  $F$  so, dass die maximale Normalspannung im Balken den Wert  $\sigma_{zul}$  nicht überschreiten wird.

1) Kräfte in  $y$ - $z$ -Komponenten unterteilen  
 $yz$ -Ebene:



2) Beanspruchung

3) "Superposition der Spannungen"

Formel 
$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} y + \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

① ② ③ *bund h  
besser andersrum  
definiert*

	$I_y$	$I_z$
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$
2	$\frac{a \cdot b^3}{12}$	$\frac{h \cdot a^3}{12}$
3	$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$	$= I_y$

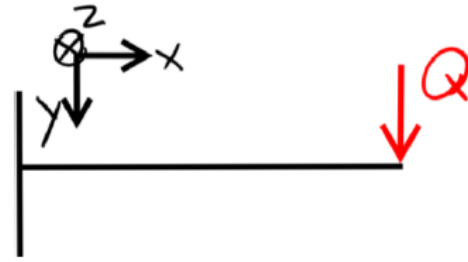
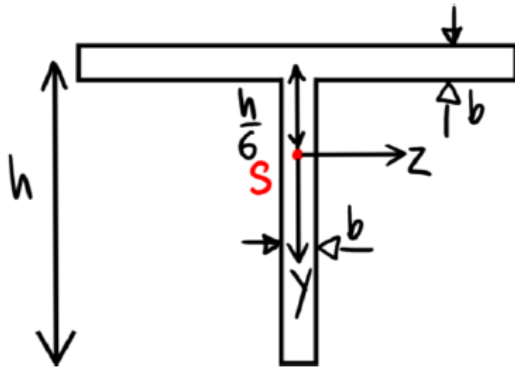
$\sigma(x, y, z) =$

$\sigma_1 =$

$\sigma_2 =$

## Aufgabe H2:

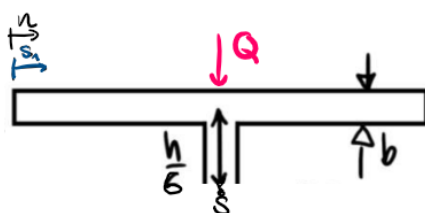
Gegeben sei ein dünnwandiger Balken ( $b \ll h$ ) mit einem T-förmigen Querschnitt. Eine Punktlast mit Betrag  $Q$  wirkt entlang der Symmetrielinie in positiver  $y$ -Richtung.



Geg.:  $Q, h, b, I_z$

- a) Welche der folgenden Skizzen entspricht der Schubspannungsverteilung im Querschnitt (mit der Flächennormalen  $\underline{e}_x$ )?

S1a).	5 mögliche Antworten	(A)	(B)	(C)
		(D)	(E)	



Schubspannungen  
durch Querkraft

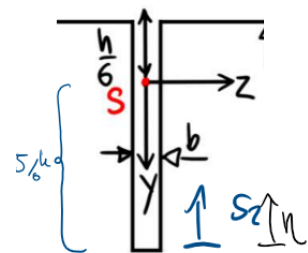
$$\tau_{xs}(s) = - \frac{1}{e(s)} \cdot \frac{Q_y}{I_z} H_z(s)$$

$$H_z(s) = \int_0^s e(\eta) \gamma(\eta) d\eta$$

b) Man bestimme das statische Moment  $H_z(y)$  im Steg (vertikaler Teil des Querschnitts).

S1b). 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
	$H_z(y) = 0$	$H_z(y) = b \left( \frac{25}{36} h^2 - y^2 \right)$	$H_z(y) = b \left( \frac{25}{36} h^2 + y^2 \right)$
		Ⓓ	Ⓔ
		$H_z(y) = \frac{b}{2} \left( \frac{25}{36} h^2 + y^2 \right)$	$H_z(y) = \frac{b}{2} \left( \frac{25}{36} h^2 - y^2 \right)$

$$H_z(s) = \int_{-s}^s y(\eta) d\eta$$



c) Man bestimmen die Verteilung der Schubspannung  $\tau_{xy}$  im Steg.

S1c). 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xy} = \frac{Q \left( \frac{25}{36} h^2 + y^2 \right)}{2I_z}$	$\tau_{xy} = \frac{Q \left( \frac{25}{36} h^2 - y^2 \right)}{I_z}$
		Ⓓ	Ⓔ
		$\tau_{xy} = \frac{Q \left( \frac{25}{36} h^2 + y^2 \right)}{I_z}$	$\tau_{xy} = \frac{Q \left( \frac{25}{36} h^2 - y^2 \right)}{2I_z}$

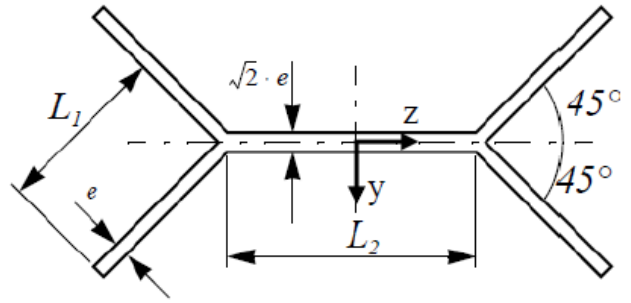
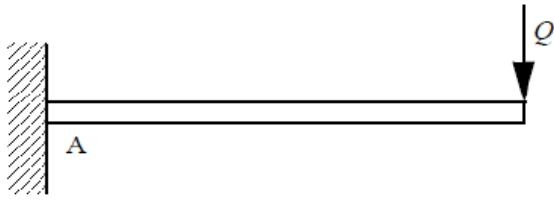
$$\tau_{xs}(s) = - \frac{1}{e(s)} \cdot \frac{Q_y}{I_z} H_z(s)$$

$$\tau_{xy}(y) = \bar{\tau} \tau_{xs}(s) =$$

wir gehen entgegen der globalen Koordinate y mit unserer Laufrichtung

## Aufgabe S2:

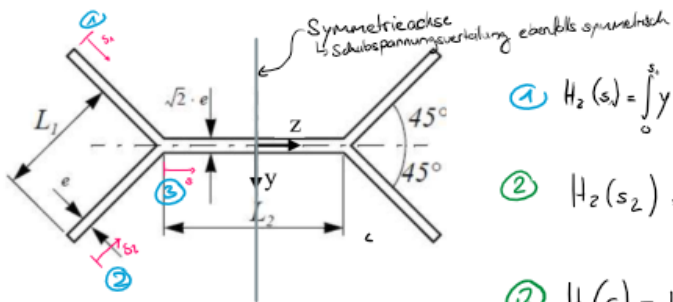
Man bestimme die Schubspannung im dargestellten dünnwandigem Querschnitt.



$$H_z(s) = \underbrace{\iint_{\Delta A} y \, dA}_{\text{alle Profile}} = \underbrace{\int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) \, d\eta}_{\text{dünnwandige Profile}} \Rightarrow y_{SP} \cdot \Delta A$$

alternative Schreibweise      für Rechtecke

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

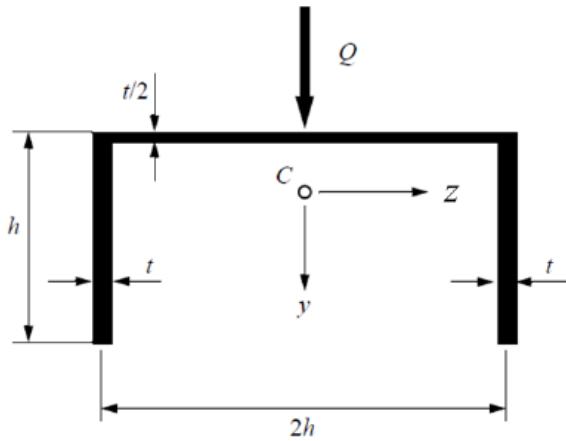


①  $H_z(s_1) = \int_0^{s_1} y(\eta) \cdot e \, d\eta =$

②  $H_z(s_2) = \int_0^{s_2} y(\eta) \cdot e \, d\eta =$

③  $H(s) = H_1(s_2) + H_2(s_1)$

### Aufgabe H3:



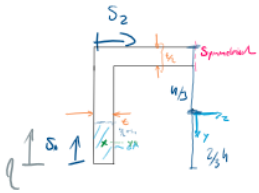
Man bestimme den Schubspannungsverlauf für den abgebildeten Querschnitt (dünnwandiges U-Profil) bei gegebener Querkraft  $Q_y$ . An welcher Stelle die maximale Schubspannung  $|\tau|_{max}$  auf?

Hinweis: (i) Schwerpunkt liegt bei  $h/3$ , (ii) die für die Lösung kann  $I_z$  als bekannt angenommen werden;

$$H_z(s) = \overbrace{\iint_{\Delta A} y \, dA}^{\text{alle Profile}} = \overbrace{\int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) \, d\eta}^{\text{dünnwandige Profile}} \Rightarrow y_{SP} \cdot \Delta A$$

alternative Schreibweise
für Rechtecke

$$\tau_{xy}(x, y) = - \frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{H_z(y)}{b(y)}$$



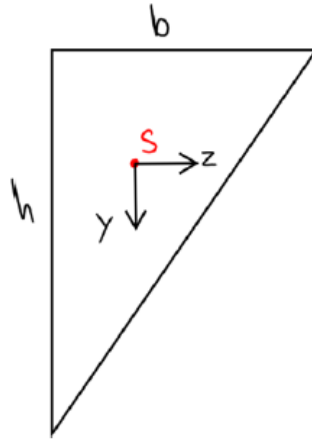
Wir setzen die Ableitung der Schubspannung gleich null, um den Extremwert in diesem Abschnitt zu bestimmen.

$$\tau'(s) =$$



### Wiederholungsaufgabe:

Ein rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt mit Schwerpunktsachsen  $y$  und  $z$  sei gegeben. Er besitze die Breite  $b$  und die Höhe  $h$  wie es in der Skizze dargestellt ist.



- a) Man bestimme die axialen Flächenträgheitsmomente  $I_y$  und  $I_z$  und das gemischte Flächenträgheitsmoment  $C_{yz}$ .

Geometrie finden wir so in der ZF und wir müssen die Trägheitsmomente durch die Integrale berechnen

① Ausgangskoordinationssystem  $(\eta, \xi)$  definieren

② Trägheitsmoment bezüglich  $(\eta, \xi)$  bestimmen

$$I_\xi = \iint \xi^2 d\eta d\xi =$$

$$I_\eta = \iint \eta^2 d\xi d\eta =$$

$$C_{\xi\eta} = - \iint \xi \eta d\xi d\eta$$

③ Schwerpunkt bestimmen (Symmetrie für den Fall  $k=b$  nicht vergessen)

$$\xi_s = \frac{1}{A} \iint \xi d\xi d\eta =$$

$$\xi_s =$$

④ Satz von Steiner (Was passiert, falls  $h=b$  und  $b=h$  für  $I_z$  und  $I_y$ )

$$I_y = I_\eta - \xi_s^2 \cdot A =$$

$$I_z =$$

$$C_{yz} = C_{\xi\eta} + \xi_s \eta_s \cdot A =$$

- b) Man bestimme die Hauptträgheitsmomente  $I_1$  und  $I_2$  und die Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis  $\frac{h}{b} = 2$ .

1) Flächenträgheitsmomente bestimmen mit  $h = 2b$ .  
Verwende hierbei die Resultate aus a).

$$\hookrightarrow I_y =$$

$$I_z =$$

$$C_{yz} =$$

2) Hauptspannungen

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_y - I_z)^2 + C_{yz}^2} =$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{C_{yz}}{I_z - I_y}\right) =$$

$$\alpha_2 + 90^\circ = \alpha_1 =$$