Mechanik 2: Übungsstunde 8

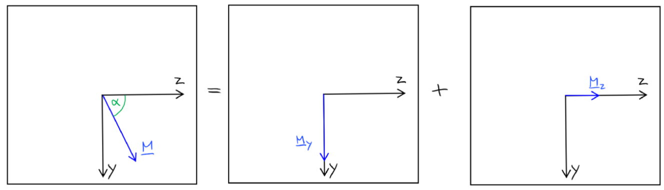
Rijo Peedikayil

24.04.2024

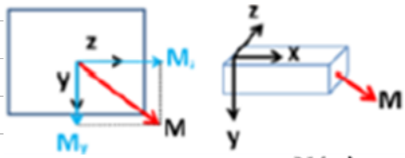
Theorie: Woche 8

1 Schiefe Biegung

Bisher wurden nur Biegemomente betrachtet, die parallel zu den Querschnittshauptachsen (y- und z-Achse) wirken. In diesem Abschnitt wird die schiefe Biegung behandelt, bei der der Biegemomentenvektor eine beliebige Richtung auf der yz-Ebene haben kann. Hierzu kann der Momentenvektor in eine y- und z Komponente projiziert werden, dann kann man die Spannungen für diese Achsen bestimmen und danach superponieren.



In dieser Abbildung gilt: $M_y = M \cdot sin(\alpha)$, $M_z = M \cdot cos(\alpha)$

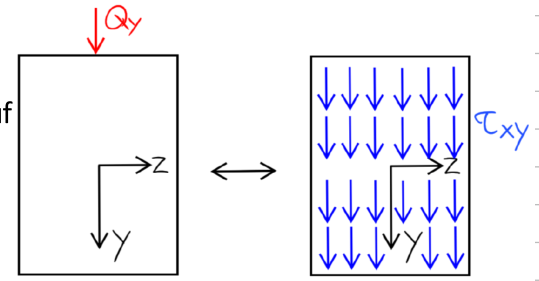


$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} * z - \frac{M_z}{I_z} * y$$

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

2 Schubspannung durch Querkraft

2.1 Vollquerschnitt



Die Querkraft Qy erzeugt einen statisch äquivalenten Schubspannungsverlauf $\tau_{xy}(y)$. Die Schubspannung ist über die Querschnittshöhe y konstant. Die Formel für die Schubspannung lautet:

$$\tau_{xy}(y) = \left(\frac{Q_y}{I_z}\right) \frac{1}{b(y)} \int_{\Delta A} y \, dA = \left(\frac{Q_y}{I_z}\right) \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

Parameter:

Qy: Querkraft

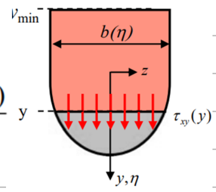
$H_z(y)$: Statisches Moment von der betrachteten Stelle y

I_z: Flächenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse

b(y): Breite des Querschnitts in Höhe y

$$H_z(y) = \int_{y\,min}^{y} \eta b(\eta) d\eta$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{Q_y(x)}{I_z} \frac{H_z(y)}{b(y)}$$

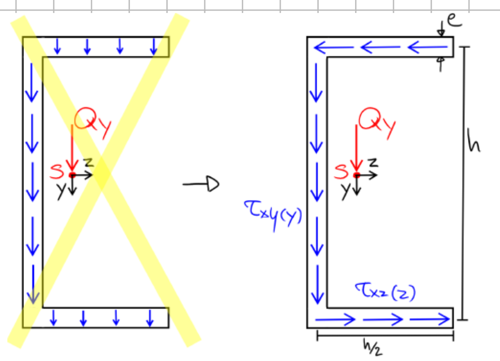


Das statische Moment hat keine direkte geometrische Bedeutung. Es ist ein Hilfsmittel zur Berechnung von anderen Grössen. Bei dünnwandigen Querschnitten lassen sich Vereinfachungen treffen und das statische Moment lässt sich dann oft einfacher berechnen.

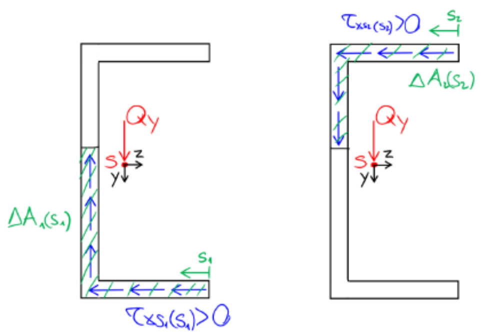
2.2 Dünnwandige Querschnitte

Dünnwandige Querschnitte haben eine große Länge im Vergleich zur Breite (e << h). Die Querkraft Q folgt der Mittellinie des Querschnitts. Es entstehen Schubspannungen $\tau_{xy}(y)$ und $\tau_{xz}(z)$. Die Schubspannungen sind in der Wandmitte am grössten und nehmen zu den Wänden hin ab (freie Oberflächen).

$$H_z(s) = \overbrace{\iint_{\Delta A} y \, dA}^{\text{alle Profile}} = \overbrace{\underbrace{\int_0^s y(\eta) \cdot e(\eta) \, d\eta}_{\text{alternative Schreibweise}} \Rightarrow \underbrace{y_{SP} \cdot \Delta A}_{\text{für Rechtecke}}}^{\text{dünnwandige Profile}}$$



$$\tau_{xs}(s) = -\left(\frac{Q_y}{I_z}\right) \frac{1}{e(s)} \int_{\Delta A} y \, dA = -\left(\frac{Q_y}{I_z}\right) \frac{H_z(s)}{e(s)}$$



Bemerkung: Es spielt keine Rolle, ob die Länge h bis in die Mitte oder bis zum Rand der Querschnittbreite definiert ist, da $e << h$.

2.3 Vorgehen: Schubspannung durch Querkraft (Allgemein)

1. Schritt: Schwerpunkt bestimmen
   Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Querschnitts. Dies ist notwendig, um die statischen Momente der Teilflächen zu berechnen.
2. Schritt: Teilflächen bestimmen
   Zerlegen Sie den Querschnitt in Teilflächen. Dies vereinfacht die Integration bei der Berechnung des statischen Moments.
3. Schritt: s einführen (bei dünnwandigen Querschnitten)
   Führen Sie die lokale Koordinate s entlang der Mittellinie des Querschnitts ein.
4. Schritt: Statisches Moment berechnen
   Berechnen Sie das statische Moment S für jede Teilfläche.
   - Vollquerschnitte:
     Integrieren Sie die Teilfläche von y_{min} nach y.
   - Dünnwandige Querschnitte:
     Lassen Sie die Teilfläche in s-Richtung wachsen.
     Starten Sie die Laufvariable s von einer freien Oberfläche (wo $\tau_{xs} = 0$).
5. Schritt: Schubspannungen berechnen
   Berechnen Sie die Schubspannungen für jede Teilfläche.

2.3.1 Vorgehen: Schubspannung durch Querkraft

1.Schwerpunkt der Querschnittsform bestimmen: Nutzen Sie Symmetrieachsen und Elementarflächen.

2.Teilflächen für die Berechnung von $\tau_{xs}(s)$ bestimmen: Wählen Sie die Teilflächen so, dass sich $y(s)\ \cdot e(s)$auf einem Abschnitt gut integrieren lässt. Teilen Sie kantige Profile in den Ecken und Kreisbögen mit Zylinderkoordinaten integriert werden.

3. Lokale Laufvariable vom Rand her einführen: Für Profile mit Verzweigungen müssen mehrere Variablen eingeführt werden. Die Art der Einführung ist irrelevant für das Ergebnis.

4. Statisches Moment für die erste Teilfläche berechnen:

$$H_{z,1}(s) = \int y(s) \cdot e(s)\, ds$$

5. Statisches Moment für die nächste Fläche berechnen und addieren: Wiederholen Sie Schritt 4 für jede Teilfläche und addieren Sie den Endwert zur Summe der vorherigen Flächen:

$$H_{z,2}(s) = \underbrace{H_{z,1}\Big|_{\text{Ende}}}_{y_1 \cdot \Delta A_1} + \int y(s) \cdot e(s)\, ds \ , \ H_{z,3}(s) = \underbrace{H_{z,2}\Big|_{\text{Ende}}}_{y_1 \cdot \Delta A_1 + y_2 \cdot \Delta A_2} + \int y(s) \cdot e(s)\, ds \ .$$

6.Schubspannung berechnen: $\tau_{xs}(s) = -\left(\frac{Q_y}{I_z}\right)\frac{H_z(s)}{e(s)}$.

$$\tau_{xs}(x,s) = -\frac{Q_y(x)}{I_z}\frac{H_z(s)}{e(s)}$$

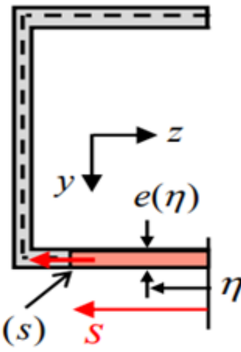
$$H_z(s) = \int_0^s y(\eta) e(\eta) d\eta$$

Bei Polarkoordinaten

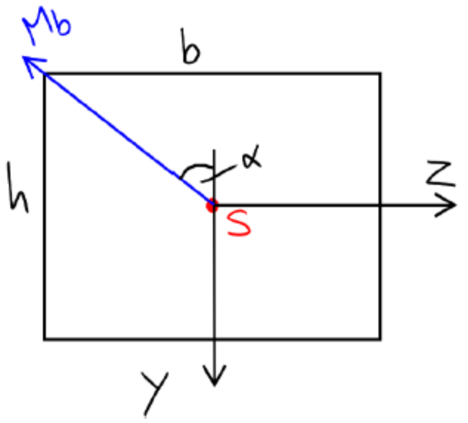
$d\eta = r \cdot d\varphi$

$y = \pm r \cdot sin\varphi$

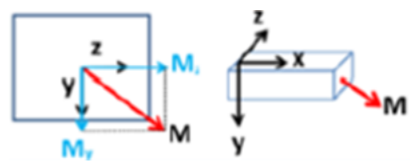
$H_z = y_s \cdot \Delta A$ (für Rechtecke) $\tau_{xs}(s)$



Aufgabe S1:



Man bestimme die maximale Normalspannung in dem auf schiefe Biegung belasteten rechteckigen Querschnitt.

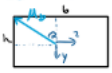


$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} * z - \frac{M_z}{I_z} * y$$

① Momente in y- und z-Komponente unterteilen

$M_{By} = -\cos\alpha \, M_B \qquad M_{Bz} = \sin\alpha \, M_B$ Achtung M_B is negativ!

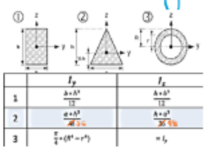
② Winkel anhand der Geometrie bestimmen



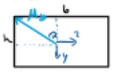
Falls M_B wie in der Skizze genau in der Eck zeigt, kann man sinα und cosα durch b und h beschreiben.

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}$$

③ Flächenträgheitsmoment bestimmen



h und b genau andersrum definiert



$$I_y = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$
$$I_z = \frac{1}{12} b h^3$$

④ Spannung durch spezielle Biegung bestimmen

$$\sigma_x(x,y,z) = -\frac{12 \sin\alpha \, M_B}{bh^3} y + \frac{12 \cos\alpha \, M_B}{hb^3} z$$

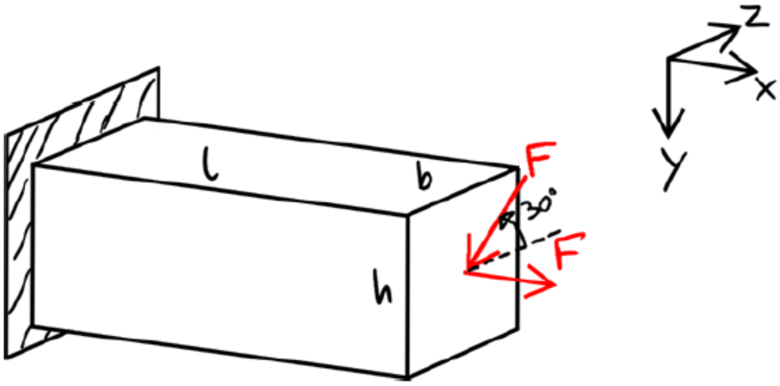
$$\sigma_{x_1}\left(x, -\frac{h}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{6 \sin\alpha \, M_B}{bh^3} + \frac{6 \cos\alpha \, M_B}{hb^3} = \frac{6 M_B}{\sqrt{b^2+h^2}}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \underline{\underline{\frac{6\sqrt{b^2+h^2}\, M_B}{b^2h^2}}} \quad \text{(Max. Druck)}$$

$$\sigma_{x_2}\left(x, \frac{h}{2}, -\frac{b}{2}\right) = -\frac{6 \sin\alpha \, M_B}{bh^3} - \frac{6 \cos\alpha \, M_B}{hb^3} = \underline{\underline{\frac{6\sqrt{b^2+h^2}\, M_B}{b^2h^2}}} \quad \text{(Max. Zug.)}$$

M_B ist negativ!

Aufgabe H1 (schiefe Biegung)

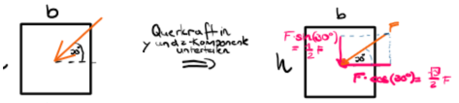
Gegeben sei ein Kragarm der Länge L mit rechteckigem Querschnitt. Am freien Ende greift eine Axialkraft mit dem Betrag F an. Des Weiteren wirkt in der y-z-Ebene eine um 30° bezüglich der z-Achse geneigte Querkraft mit dem Betrag F. Die Kraftangriffspunkte liegen auf der Balkenmittellinie.



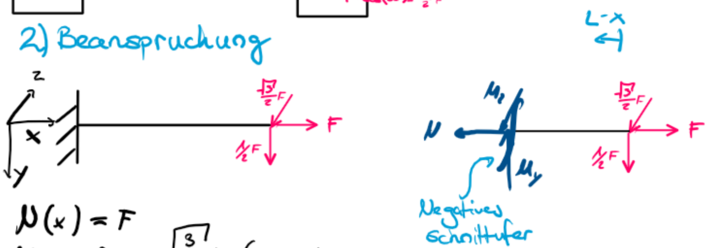
Man bestimme den maximal zulässigen Betrag F so, dass die maximale Normalspannung im Balken den Wert σ_{zul} nicht überschreiten wird.

1) Kräfte in y-z-Komponenten unterteilen

yz-Ebene:



2) Beanspruchung



$$N(x) = F$$

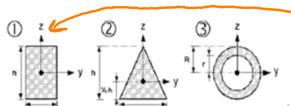
$$M_y(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} F (L-x)$$

$$M_z(x) = \frac{F}{2}(L-x)$$

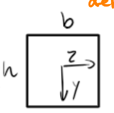
3) "Superposition der Spannungen"

↳ Formel $\boxed{\sigma_x = \frac{N(x)}{A} - \frac{M_z(x)}{I_z} y + \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z}$

b und h genau andersrum definiert



	I_y	I_z
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$
2	$\frac{a \cdot h^3}{\cancel{48}\,36}$	$\frac{h \cdot a^3}{\cancel{36}\,48}$
3	$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$	$= I_y$



$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

$$I_z = \frac{1}{12} b h^3$$

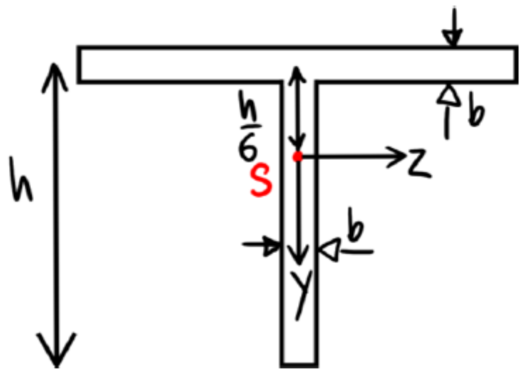
$$\sigma(x,y,z) = \frac{F}{bh} - \frac{6F(L-x)}{bh^3} y + \frac{6\sqrt{3} F(L-x)}{hb^3} z$$

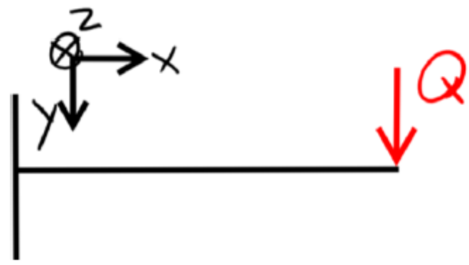
$$\sigma\left(0, \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}b\right) = \frac{F}{bh} + \frac{3FL}{bh^2} + \frac{3\sqrt{3} FL}{hb^2} = \frac{F}{bh}\left(1 + \frac{3L}{h} + \frac{3\sqrt{3}L}{b}\right) < \sigma_{zul}$$

$$\underline{\underline{F < \frac{\sigma_{zul} \cdot bh}{\left(1 + \frac{3L}{h} + \frac{3\sqrt{3}L}{b}\right)}}}$$

Aufgabe H2:

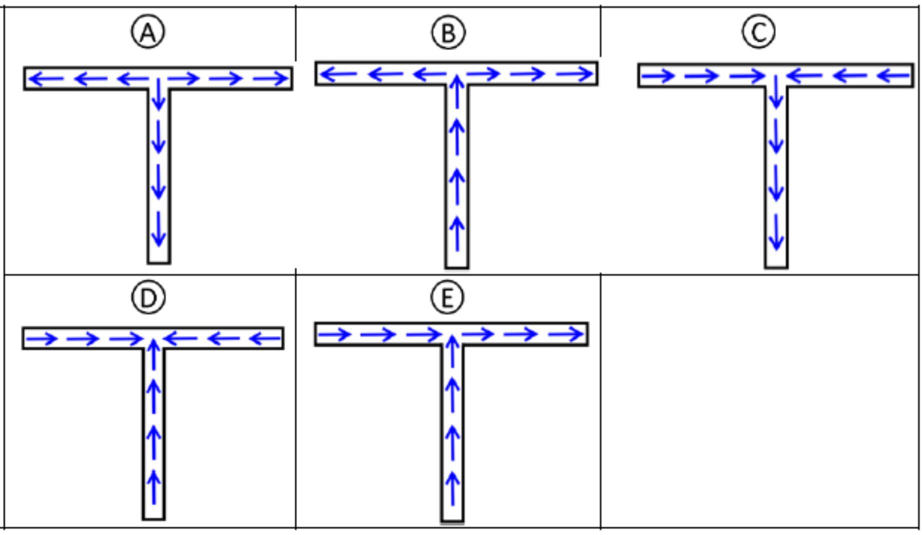
Gegeben sei ein dünnwandiger Balken ($b \ll h$) mit einem T-förmigen Querschnitt. Eine Punktlast mit Betrag Q wirkt entlang der Symmetrielinie in positiver y-Richtung.

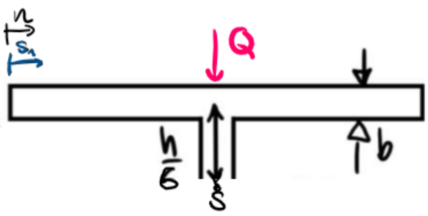




Geg.: Q, h, b, I_z

a) Welche der folgenden Skizzen entspricht der Schubspannungsverteilung im Querschnitt (mit der Flächennormalen $\underline{e}_x$)?

S1a). 5 mögliche Antworten	



Schubspannungen durch Querkraft

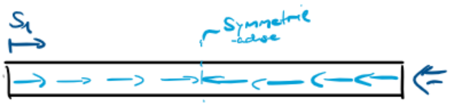
$$\boxed{\tau_{xs}(s) = -\frac{1}{\varrho(s)} \cdot \frac{Q_y}{I_z} H_z(s)}$$

$$\boxed{H_z(s) = \int_0^s \varrho(\eta)\, y(\eta)\, d\eta}$$

$$\tau_{xs}(s_1) = -\frac{Q_y}{\underbrace{\varrho}_{\text{konstant}} I_z} \int_0^{s_1} \overbrace{\varrho}^{\text{konstant}}\, y(\eta)\, d\eta$$

$$= -\frac{Q}{I_z}\left(-\frac{h}{6}\right)s$$

$$= (+)\frac{Q}{I_z} \quad \frac{bhs}{6}$$



↳ Resultierende in z-Richtung $\int \tau_{xs}\, dz = 0$

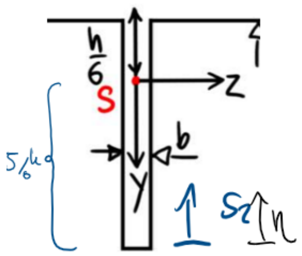
↳ Resultierende in y-Richtung $\int_{-h/6}^{5/6 h} \tau_{xs}\, dy = Q$

$\Rightarrow$ C

b) Man bestimme das statische Moment $H_z(y)$ im Steg (vertikaler Teil des Querschnitts).

S1b). 5 mögliche Antworten	Ⓐ $H_z(y) = 0$	Ⓑ $H_z(y) = b\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)$	Ⓒ $H_z(y) = b\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)$
		Ⓓ $H_z(y) = \frac{b}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)$	Ⓔ $H_z(y) = \frac{b}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)$

$$\boxed{H_z(s) = \int_0^s e(\eta)\, y(\eta)\, d\eta}$$



$$y(\eta) = \frac{5h}{6} - \eta$$ (Die y-Koordinate basierend auf unsere Laufvariable η/s)

$$H_z(s) = e\int_0^{s_z} y(\eta)\, d\eta = b\int_0^{s_z} \frac{5}{6}h - \eta \; ds = b\left(\frac{5}{6}hs - \frac{1}{2}s^2\right)$$

↳ Gefragt ist aber $H_z(y)$ → also rucksubstituieren: $s = \eta = \frac{5}{6}h - y$)

$$H_z(y) = b\left(\frac{25}{36}h^2 - \frac{5}{6}hy - \frac{1}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 - \frac{5}{3}hy + y^2\right)\right)$$

$$= b\left(\frac{25}{72}h^2 - \frac{1}{2}y^2\right) = \underline{\underline{\frac{b}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}}$$

c) Man bestimmen die Verteilung der Schubspannung τ_{xy} im Steg.

S1c). 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\tau_{xy} = 0$	Ⓑ $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)}{2I_z}$	Ⓒ $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}{I_z}$
		Ⓓ $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)}{I_z}$	Ⓔ $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}{2I_z}$

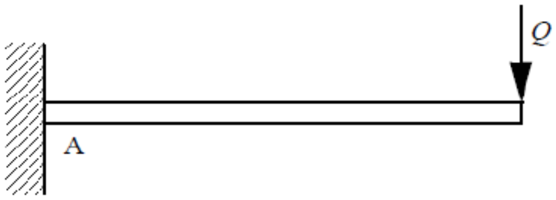
$$\boxed{\tau_{xs}(s) = -\frac{1}{e(s)} \cdot \frac{Q_y}{I_z} H_z(s)}$$

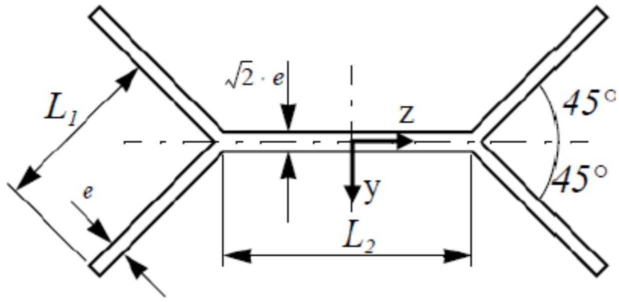
$$\tau_{xy}(y) = -\tau_{xs}(s) = \frac{1}{b}\,\frac{Q}{I_z} \cdot H_z(y) = \underline{\underline{\frac{Q}{2I_z}\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}}$$

wir gehen entgegen der globalen Koordinate y mit unser Laufvariable

Aufgabe S2:

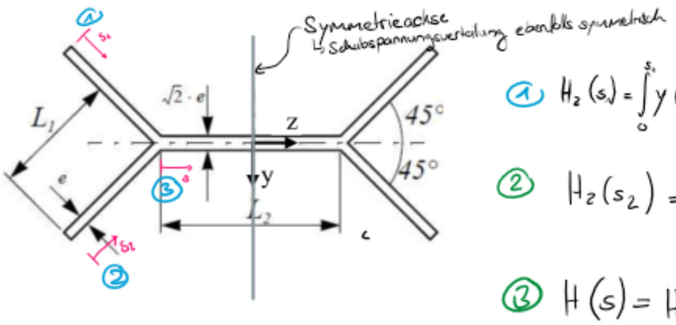
Man bestimme die Schubspannung im dargestellten dünnwandigem Querschnitt.





$$H_z(s) = \overbrace{\iint_{\Delta A} y\, dA}^{\text{alle Profile}} = \overbrace{\underbrace{\int_0^s y(\eta)\cdot e(\eta)\, d\eta}_{\text{alternative Schreibweise}} \Rightarrow \underbrace{y_{SP}\cdot \Delta A}_{\text{für Rechtecke}}}^{\text{dünnwandige Profile}}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -\frac{Q_y(x)}{I_z}\frac{H_z(y)}{b(y)}$$



① $H_z(s) = \int_0^{s_1} y(\eta)\, e\, d\eta = e\int_0^{s_1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}L_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\right) d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}e\left(-L_1 s_1 + \frac{1}{2}s_1^2\right)$

② $H_z(s_2) = \int_0^{s_2} y(\eta)\, e\, d\eta = e\int_0^{s_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\right) d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}e\left(-\frac{1}{2}s_2^2 + L_1 s_2\right)$

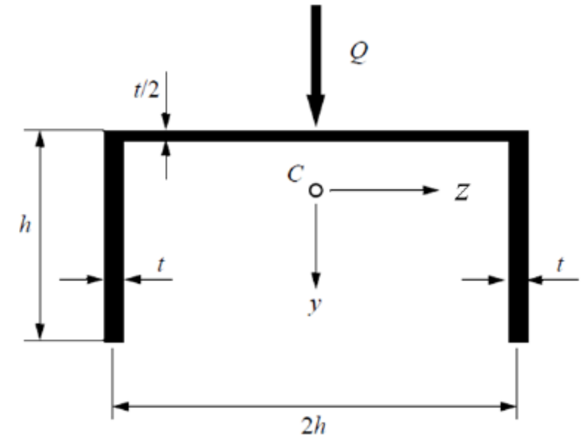
③ $H(s) = H_1(s_2) + H_2(s_1) = 0$

① $\tau_{xs}(s_1) = \frac{-Q}{\sqrt{2}e\, I_z} H(s_1) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}Q}{2 I_z}\left(L_1 s_1 - \frac{1}{2}s_1^2\right)}}$

② $\tau_{xs}(s_2) = \frac{-Q}{\sqrt{2}e\, I_z} H(s_2) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}Q}{2 I_z}\left(-L_1 s_2 + \frac{1}{2}s_2^2\right)}}$

③ $\tau_{xs}(s) = \underline{\underline{0}}$

Aufgabe H3:

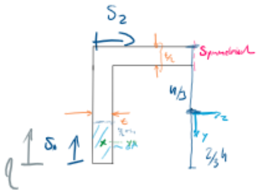


Man bestimme den Schubspannungsverlauf für den abgebildeten Querschnitt (dünnwandiges U-Profil) bei gegebener Querkraft Q_y. An welcher stelle die maximale Schubspannung $|\tau|_{max}$ auf?

Hinweis: (i) Schwerpunkt liegt bei $h/3$, (ii) die für die Lösung kann I_z als bekannt angenommen werden;

$$H_z(s) = \overbrace{\iint_{\Delta A} y\,dA}^{\text{alle Profile}} = \overbrace{\underbrace{\int_0^s y(\eta)\cdot e(\eta)\,d\eta}_{\text{alternative Schreibweise}} \Rightarrow \underbrace{y_{SP}\cdot \Delta A}_{\text{für Rechtecke}}}^{\text{dünnwandige Profile}}$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -\frac{Q_y(x)}{I_z}\frac{H_z(y)}{b(y)}$$



$y(\eta) = \frac{2}{3}h - \eta$

$H_1(s) = t\int_0^s \frac{2}{3}h - \eta \, d\eta = t\left(\frac{2}{3}hs_1 - \frac{1}{2}s_1^2\right) = y_s(s_1)\cdot \Delta A = \left(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}s_1\right)\cdot(s_1\cdot t)$

$\tau_{xs}(s_1) = \frac{-Q}{I_z}\left(\frac{2}{3}hs_1 - \frac{1}{2}s_1^2\right)$

Wir setzen die Ableitung der Schubspannung gleich null, um den Extremwert in diesen Abschnitt zu bestimmen.

$\tau'(s) = \left(\frac{2}{3}h - s_1\right) = 0 \quad s_1 = \frac{2}{3}h \quad \tau\left(s_1 = \frac{2}{3}h\right) = \frac{Q}{I_z}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}h^2 - \frac{4}{9}h^2\right) = \frac{Q}{I_z}\left(\frac{2}{9}h^2 - \frac{4}{9}h^2\right) = -\frac{2}{9}h^2\frac{Q}{I_z}$

$H_2(s) = H_1(h) + H(s) = t\left(\frac{2}{3}h^2 - \frac{1}{2}h^2\right) + y_s\,\Delta A = \frac{1}{6}h^2 t + \underbrace{\left(-\frac{h}{3} + \frac{t}{4}\right)}_{y_s}\underbrace{s_2\cdot\frac{t}{2}}_{\Delta A} = \left(\frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{6}hs_2\right)\cdot t$

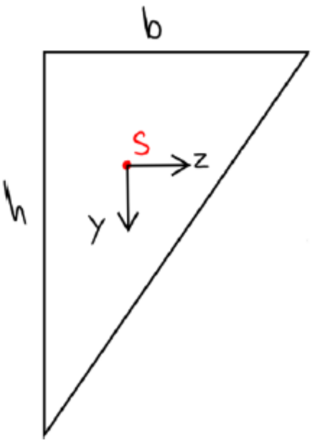
vernachlässigbar da h >> t

$\tau_{xs} = \frac{-2Q}{t\,I_z}\left(\frac{1}{6}h^2 - \frac{th}{6}s_2\right) = \frac{Q}{I_z}\left(-\frac{1}{3}h^2 + \frac{th}{3}s_2\right)$ maximal bei $s_2 = 0$

$\tau_{xs}(s_2 = 0) = -\frac{Q}{I_z}\frac{1}{3}h^2$ (Problem symmetrisch $\frac{Q}{I_z}\frac{1}{3}h^2$ auf der anderen Seite)

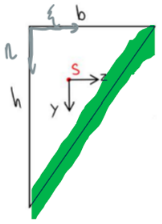
Wiederholungsaufgabe:

Ein rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt mit Schwerpunktachsen y und z sei gegeben. Er besitze die Breite b und die Höhe h wie es in der Skizze dargestellt ist.



a) Man bestimme die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z und das gemischte Flächenträgheitsmoment C_{yz}.

Geometrie finden wir so in der ZF und wir müssen die Trägheitsmomente durch die Integrale berechnen



① Ausgangskoordinatensystem $(\eta\xi)$ definieren

$$\eta = -\frac{h}{b}\xi + h \qquad \xi = (\eta - h)\frac{b}{h} = -\frac{b}{h}\eta + b$$

② Trägheitsmoment bezüglich $(\eta\xi)$ bestimmen

$$I_\eta = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}\xi+h} \xi^2 \, d\eta \, d\xi = \int_0^b -\frac{h}{b}\xi^3 + h\xi^2 \, d\xi = -\frac{h}{4b}\xi^4 + \frac{h}{3}\xi^3 \Big|_0^b = -\frac{3hb^3}{3\cdot 4} + \frac{hb^3 4}{4\cdot 3} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_\xi = \int_0^h \int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \eta^2 \, d\xi \, d\eta = \int_0^h -\frac{b}{h}\eta^3 + b\eta^2 \, d\eta = \frac{h^3 b}{12}$$

$$C_{\xi\eta} = -\int_0^h \int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \eta\xi \, d\xi \, d\eta = -\int_0^h \eta \left[\frac{1}{2}\xi^2\right]_0^{\left(-\frac{b}{h}\eta+b\right)} d\eta = -\frac{1}{2}\int_0^h \eta\left(\frac{b^2}{h^2}\eta^2 - \frac{2b^2}{h}\eta + b^2\right) d\eta = -\frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{b^2}{h^2}\eta^3 - \frac{2b^2}{h}\eta^2 + b^2\eta\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{4h^2}\eta^4 - \frac{2b^2}{3h}\eta^3 + \frac{b^2\eta^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\left[\frac{3b^2h^2}{3\cdot 4} - \frac{4\cdot 2b^2h^2}{4\cdot 3} + \frac{6\cdot b^2h^2}{6\cdot 2}\right]$$

$$= \frac{-b^2h^2}{24}$$

③ Schwerpunkt bestimmen (Symmetrie für den Fall h=b nicht vergessen)

$$\eta_S = \frac{2}{hb}\int_0^h\int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \eta \, d\xi \, d\eta = \frac{2}{hb}\int_0^h \left(-\frac{b}{h}\eta^2 + b\eta\right) d\eta = \frac{2}{hb}\left(-\frac{bh^2}{3} + \frac{b}{2}h^2\right) = \frac{1}{3}h$$

$\xi_S = \frac{1}{3}b$ (Symmetrie falls b=h)

④ Satz von Steiner (Was passiert, falls h=b und b=h für I_z und I_y)

$$I_y = I_\eta - \xi_S^2 \cdot A = \frac{3hb^3}{3\cdot 12} - \frac{2hb^3}{2\cdot 18} = \underline{\underline{\frac{1}{36}hb^3}}$$

$$\underline{\underline{I_z = \frac{1}{36}bh^3}}$$

$$C_{yz} = C_{\eta\xi} + \eta_S\xi_S \cdot A = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{3}b \cdot \frac{hb}{2} = -\frac{3b^2h^2}{3\cdot 24} + \frac{4b^2h^2}{4\cdot 18} = \underline{\underline{\frac{b^2h^2}{72}}}$$

b) Man bestimme die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2 und die Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 2$.

1) Flächenträgheitsmomente bestimmen mit $h = 2b$.
Verwende hierbei die Resultate aus a).

$$\hookrightarrow I_y = \frac{1}{36} 2b^4 = \frac{1}{18} b^4$$

$$I_z = \frac{1}{36} 8b^4 = \frac{4}{18} b^4$$

$$C_{yz} = \frac{b^2 \, 4b^2}{72} = \frac{b^4}{18}$$

2) Hauptspannungen

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_y - I_z)^2 + C_{yz}^2} = \frac{b^4}{18}\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} 3^2 + 1}\right)$$

$$I_1 = \frac{b^4}{36}\left(5 + \sqrt{13}\right) \qquad I_2 = \frac{b^4}{36}\left(5 - \sqrt{13}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{C_{yz}}{I_z - I_y}\right) = \underline{-16.85^\circ} \qquad \alpha_2 + 90^\circ = \alpha_1 = 73.15^\circ$$